Math. P. 382 ^{ft}

Ohm

<36610801630014

<36610801630014

Bayer. Staatsbibliothek

Versuch
einer kurzen,
gründlichen und deutlichen,
auch
Nichtmathematikern
verständlichen Anweisung,

10 — 14jährige Knaben in Untermittelklassen eines Gymnasiums; in obern Klassen einer gelehrten Vorbereitungsschule, desgleichen in höhern Bürger- und technischen Vorbereitungs-Schulen, zu einem leichten, gründlichen und wissenschaftlichen Studium der Mathematik fähig zu machen.

Als Einleitung in seine Elementar-Mathematik, auch für den Selbstlernenden als Kommentar zu selbiger

bearbeitet
vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königlichen Universität, an der Königlichen Bau-Akademie und an der Königlichen allgemeinen Kriegsschule zu Berlin, der Kais. Ruß. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, so wie auch mehrer andern gelehrten Gesellschaften korrespondirenden Mitglied.

Mit einer Formeltabelle und einer Figurentafel.

Berlin 1827.
Bei T. H. Riemann.

18 - Bg.

O Musa tu, che di caduchi allori
Non circondi la fronte in Elicona
Ma che nel cielo infra i beati cori
Hai di stelle immortali aurea corona,
Tu spira al petto mio celesti ardori
Tu rischiar'il mio — — et tu perdoni
S'intesso fregi al vero, s'adorno in parte
D'altri diletti che de tuoi le carte.

Sai che la corre il monde ove piu versi
Di sue dolcezze il lusinghier — —
E che il vero condito in molli — —
J piu schivi alletando ha persuaso.
Cosi all' egro fanciullo porgiamo aspersi
Di suave licori gli orli del vaso
Succhi amari ingannato in tanto ei beve
E d'all' inganno suo vita riceve.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Der Vfr. erfüllt das in der Vorrede zum dritten Bande seiner Elementar-Mathematik gegebene Versprechen, und liefert hier die Einleitung zu jenem Werke, welche die Absicht hat, zu zeigen, auf welchem Wege es ihm als Gymnasiallehrer gelungen ist, seinen Schülern solche Lust und Liebe für Mathematik einzuflößen, daß sie fast alle, mit seltenen Ausnahmen, ungewöhnliche Fortschritte in dieser Wissenschaft gemacht, und späterhin auf der Universität noch das Studium der Mathematik, als Nebenbeschäftigung und nicht ohne Liebe, fortgesetzt haben. Und weil diese Erscheinung von dem Vfr. der größern Wissenschaftlichkeit und Consequenz zugeschrieben wird, nach denen er in seinen Lehrbüchern gestrebt hat, diese Lehrbücher selbst aber dadurch ein etwas abstraktes Ansehen haben, so wird gegenwärtige Einleitung zu selbigen vorzüglich auseinanderzusetzen haben, wie es möglich ist, für eine etwas abstraktere Mathematik, 10 — 14jährigen Knaben Liebe einzuflößen, so daß sie sich mit Eifer und mit Erfolg daran machen und nimmer ermüden.

Man wird dem Vfr. zugeben, daß es eine nicht leichte Aufgabe ist, das Leben einer oder mehrer Unterrichtsstunden mit todten Worten zu schildern, das Bewegliche und Wogende, wenn auch von dem Lehrer nach dem jedesmaligen Bedürfniß des Augenblicks moderirt, durch das Erstarrte und Feste und Unbewegliche. Kann man wohl etwas anderes thun, als Andeutungen geben, wie der flüchtige Geist überall festgehalten und zum Bleiben gebracht werden müsse, ja wie er schnell und unversehens entwischt und nur die todte Form in den Händen zurückläßt; wie deshalb jeder Augenblick benützt werden müsse, ihn auf's neue zu bannen und zu binden, oder doch ihn schwebend zu erhalten? Wie glücklich wäre ein Autor, wenn er von sich selber so viele Abdrücke machen lassen könnte, wie von seinem Manuscript, und wenn jedem Exemplar des Buches ein dito des Autors beigepakt werden müßte, das den Leser des erstern freundlich an die Hand nehmen und im traulichen Zweigespräch das Buch selber zur Stelle in anderweitig zu benützende Makulatur verwandeln dürfte? — Und wenn dieser Wunsch nicht erfüllt werden kann, muß sich nicht ein Autor wenigstens wünschen, freundliche, ihm geneigte Leser zu finden, die (nach Göthe) zwischen den Zeilen lesen, d. h. aber so verstanden, daß sie sich erst (durch Lesung seiner übrigen Schriften) mit dem Autor auf alle mögliche Weise näher vertraut zu machen suchen, um die Zwischenzeilen möglichst in seinem Geiste, und nicht, wie meist ge-

schieht, in einem ganz fremdartigen, dem seinigen oft entgegengesetzten zu denken? — Und namentlich möchte sich der gegenwärtige Vfr. für diese Andeutungen recht viele solche freundliche Leser wünschen, die mit Vertrauen zu ihm kommen und wirklich den Versuch anstellten, der hier beschrieben wird, und die nicht gleich ermüden, wenn ihren Erwartungen nicht in dem versprochenen Maße entsprochen werden sollte, sondern die von der Ansicht ausgehen, daß man jede Sache öfter getrieben haben müsse, um die nöthige Uebung darin gehabt und dadurch Fertigkeit und Gewandtheit in ihrer Ausführung sich verschafft zu haben; denen das Wort des Autors vorläufig genügt, daß er mittelst seiner Lehrbücher und durch seine Methode den oben beschriebenen Erfolg verwirklicht gesehen hat, durch sich selbst und durch einige Lehrer, welche seinem früheren Gymnasial-Unterricht in der Absicht beigewohnt haben, um diese Methode in ihrer Ausführung näher kennen zu lernen.

Es hofft aber der Vfr. nicht, daß irgend ein Lehrer nach den gegenwärtigen Andeutungen gut und mit größerem Erfolg unterrichten werde, der nicht wenigstens die 3 Bände seiner reinen Elementar-Mathematik und noch die als erste Fortsetzung derselben erschienene höhere Geometrie in ihren Elementen, vorher sich recht gründlich dergestalt zu eigen gemacht hat, daß er in den Geist derselben gehörig eingedrungen ist. Und noch besser wird es seyn, wenn derjenige, welcher

sich dieser Unterrichts-Methode bedienen will, auch alle übrigen Schriften des Vfrs. in ihrem eigenthümlichen Geiste gelesen und erfaßt hat *), weil es bekannt genug ist, daß nur da der größte Erfolg statt findet, wo die umfassendste Consequenz getroffen wird, so daß, wer B sagt, auch A gesagt haben muß.

Uebrigens hat der Vfr. gewöhnlich die nur 9 Bogen starke: Elementar-Geometrie und Trigonometrie Berlin 1819 als Leitfaden zu dem erstern geometrischen Unterrichte benützt? Die kleinen Mängel desselben wird der Lehrer, der dasselbe ebenfalls zu Grunde legen wollte, leicht verbessern oder unbeachtet lassen. Für Tertia, besonders aber für Sekunda würde der Vfr. anrathen, lieber den 2ten Band der Elementar-Mathematik zu Grunde zu legen, um so mehr, da in den obern Klassen die Schüler schon daran gewöhnt werden müssen, Bücher selbst zu lesen und zu verstehen, daher ein ausführlicheres Werk dann ganz unentbehrlich wird.

Die Citate beziehen sich alle auf die besonders angeheftete Formeltabelle.

Berlin im Januar 1827.

Dr. M. Ohm.

---

*) Namentlich die zwei bis jetzt erschienenen Bände seiner Analysis, die Aufsätze aus dem Gebiete der höhern Mathematik und die Lehre vom Größten und Kleinsten.

Allgemeine Einleitung.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Allgemeine Einleitung.

Es sey dem Vfr. vergönnt, in dieser allgemeinen Einleitung die Voraussetzungen anzugeben, unter welchen er glaubt, daß die hier näher entwickelte Unterrichts-Methode mit Nutzen in Anwendung gebracht werden könne, so wie die Grundsätze festzustellen, welche er bei seinem Unterrichte unwiderruflich vor Augen hat, endlich auch einige Winke und Bemerkungen niederzulegen, welche er der nähern Prüfung nicht unwerth hält.

Es setzt aber der Vfr. für die Anwendbarkeit der hier näher entwickelten Methode zunächst voraus:

1) daß der mathematische Unterricht von dem Rechnen-Unterrichte völlig getrennt sey, nur in der obern Hälfte eines Gymnasiums getrieben werde (höchstens noch einige Stunden wöchentlich in Quarta) und daß dagegen in den untersten Klassen bis Quarta inclusive das gemeine praktische Rechnen recht tüchtig eingeübt worden sey, ohne dabei Mathematik einzumengen; *)

2) daß in jeder mathematischen Klasse wöchentlich dem Un-

*) Etwa nach dem: Kurzen, gründlichen und leichtfaßlichen Rechenbuche. Berlin 1818.

terrichte 6 Stunden eingeräumt seyen, wovon 3 zum geometrischen, und 3 zum arithmetischen (analytischen) Unterricht verwandt werden;

3) daß der gesammte Unterricht an der ganzen Anstalt durchaus consequent in derselben Ansicht gegeben werde, wo möglich von einem und demselben Lehrer, oder doch 18 Stunden von unten herauf von einem und demselben Lehrer, und in jedem Falle durchaus in dem Sinne und Geiste der Lehrbücher. *)

Als oberster Grundsatz des Unterrichts steht bei dem Verfasser fest:

> die Mathematik nicht blos als ein todtes Aggregat von Sätzen zu betrachten, die einmal wie das anderemal vorgetragen und von den Schülern erlernt werden müssen; so etwa, daß der bessre Schüler daran erkannt wird, daß er mehre dieser Sätze, und diese wieder mund- oder schreibfertiger wiedergeben kann.

Wenn schon der Geschichtslehrer nicht für seine Vorträge begeistert, der die Geschichte als eine im Gedächtniß zu behaltende Reihe von Namen und Jahrzahlen gibt; wenn schon der Lehrer der Physik nicht Interesse für seine Wissenschaft erregt, der solche als eine todte Sammlung vereinzelter und durch nichts verbundener Naturgesetze behandelt, — und wenn dem Lehrer der Naturgeschichte alle Theilnahme fehlt, sobald er seinen Vortrag in eine bloße Nomenklatur ausarten läßt, — wenn der Sprachlehrer nicht gerne gehört wird, welcher die Sprache erblicken läßt als eine bloße Summe von Regeln und Ausnahmen, — wenn

---

*) Die Elementar-Mathematik in 3 Bänden. Berlin 1825. 26. Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Analysis 2 Theile. Berlin 1822. Elementar-Geometrie und Trigonometrie. Berlin 1819.

endlich der Religionslehrer sich keines Erfolgs zu erfreuen hat, welcher die Religion als ein Aggregat von Dogmen oder moralischen Vorschriften seinen Schülern einlehren will, und der nicht durchdrungen ist von dem Geiste der christlichen Liebe, und daher auch nicht im Stande ist, denselben Geist der Liebe in seinen Zöglingen zu beleben und zu pflegen — — wie will die Mathematik sich Anhänglichkeit und Liebe verschaffen, wenn auch aus ihr alles geistige Leben verschwunden oder solches vielmehr in ihr unbeachtet geblieben seyn sollte! *)

Es muß daher die Mathematik an der ganzen Anstalt ein durchaus in und durch sich zusammenhängendes, sich selbst zum Zweck habendes Ganzes bilden, vom untern Anfang an, bis zum obern Ende, mit einer und derselben Consequenz durchgeführt.

Dazu ist nun zunächst erforderlich:

daß die Mathematik selbst, als Wissenschaft, in einer organischen Einheit ausgebildet sey, so nehmlich, daß alle arithmetischen (analytischen), geometrischen und phoronomischen Theile derselben ein gemeinsamer Geist belebe; daß in allen einzelnen Theilen und im Ganzen ein und derselbe nothwendige Zusammenhang, eine und

*) Man macht leicht folgende Bemerkung: Ein geistvoller Lehrer bringt die talentvollsten Schüler am weitesten in der Euklid'schen Geometrie. Ein mechanisch abgerichteter und abrichtender Lehrer bringt die maschinenähnlichsten Schüler am weitesten in den arithmetischen Theilen, und die talentvollern bleiben zurück. — Wenn aber ein Schüler Buchstaben-Ausdrücke mechanisch fertig behandeln (ja einfache und quadratische Gleichungen mit mechanischer Fertigkeit auflösen) kann, dürfen wir uns darüber freuen? — wenn er nicht auch zugleich allgemeine Ansichten, Consequenz im denken und dadurch wiederum Fertigkeit und Gewandheit im selbstthätigen Auffinden (wenn auch nur ihm) neuer mathematischen Wahrheiten sich erworben hat.

dieselbe nothwendige und unerschütterliche Consequenz herrsche, damit dem Schüler gleich von vorn herein an der das ganze leitenden Idee ein Faden in die Hand gegeben werde, an welchem er sich selbstthätig forthelfen könne.

Diese Aufgabe ist dem Verfasser, in so ferne er Mathematiker und Lehrer ist, von jeher als die höchste und wichtigste erschienen, und der Versuch ihrer Lösung war deshalb bisher das einzige Ziel seines wissenschaftlichen Forschens und Strebens, so daß, wenn daraus materiell neues hervorgeht, solches nur als eine nothwendige Folge dieses Strebens anzusehen seyn dürfte. — Und welch' freudige und herrliche Erscheinungen gehen aus ihrer Lösung hervor? — Der das ganze belebende Geist, von welchem der Lehrer durchdrungen ist, geht in den Schüler unvermerkt über; die unerschütterliche Consequenz verstattet eine selbstthätige Uebung des Schülers, die leicht und kräftigend zugleich mit Lust und Eifer begonnen, mit Liebe fortgesetzt, und durch einen alles übertreffenden Erfolg gekrönt wird. Eine Klasse in diesem Geiste und Sinne unterrichteter Schüler sprüht voll regen Feuers, und in ihr entwickelt sich ein kräftiges, geistiges Leben, welches auf die allgemeine Bildung mit unvermeidlichem, erfreulichem Erfolge wirkt.

So sehen wir dann den Zweck des mathematischen Unterrichts in unsern allgemeinen Bildungs-Anstalten erreicht, während das Materielle der Wissenschaft dem Schüler noch als eine Zugabe bleibt, und von ihm, auch wenn er die Absicht dazu hätte, nicht entfernt werden kann. *)

---

*) So gebildete Schüler hören auch noch auf der Universität nicht blos mathematische, sondern auch andere, allgemein bildende Vorlesungen; denn sie haben erkannt, daß es ein höherer Genuß ist, seine geistigen Bedürfnisse zu befriedigen, als seine körperlichen, und daß man zwar ißt, um zu leben, aber nicht lebt, um zu essen.

Damit aber diese kräftigere, wahrhaft bildende Behandlung des mathematischen Unterrichts immer noch allgemeiner werden möge, muß der Vfr. recht angelegentlich wünschen, daß von unsern Lehramts-Kandidaten noch immer mehre mittelst ihrer vorbereitenden Studien so weit wenigstens gekommen seyn mögen, daß sie die dermaligen Grenzen ihrer Wissenschaft übersehen, und die feinern Anwendungen derselben auf Physik kennen gelernt haben, beides wenigstens im Allgemeinen, wenn auch in jedes Einzelne eingegangen zu seyn, von dem angehenden Lehrer nicht verlangt, dagegen während der Dauer seines Lehr-Amtes darauf noch einzugehen, ihm zur Gewissens-Pflicht gemacht werden kann. — Niemand wird nehmlich in den Elementen gut und zweckmäßig unterrichten, der nicht über das Ganze einen geistigen Ueberblick gewonnen und eben dadurch die so unentbehrliche organische Einheit des gesammten Vortrags erkannt hat. Niemand wird gute Wege betreten, der das Ziel derselben nicht kennt; niemand wird geistig anregen, der selber nicht den Geist in und mit sich herumträgt; niemand wird unter seinen Schülern Liebe (diese einzige wirksame Triebfeder alles Guten) für Mathematik zu beleben wissen, der selbst nicht dafür begeistert ist; und niemand kann für diese Wissenschaft begeistert seyn, der nicht ihren ganzen weiten Umfang, wenigstens im Allgemeinen übersieht. — Es gab allerdings eine Zeit, wo der schon für gelehrt gehalten wurde, welcher griechisch lesen konnte; macht man deshalb jetzt nicht größere Anforderungen an den Lehrer der griechischen Sprache? Vor 60 Jahren noch wurde in Deutschland schon der für einen tüchtigen Lehrer der Mathematik gehalten, der das verstand, was uns der Freiherr von Wolf von ihr gegeben hat. Für den gegenwärtigen Zustand der Mathematik dagegen können selbst Kästners Schriften fast nur noch geschichtlichen Werth haben. Auf Euler's Arbeiten gegründet hat sich seit la Grange's Auftre-

ten bis zu seinem Tode (1813) in Frankreich die, durch an sich unglückliche Zeitverhältnisse so sehr begünstigte Mathematik mit Riesenschritten entwickelt; das geistige Princip derselben ist belebt, und unaufhaltsam vernichtet es die todte, pedantische Form, die man so lange für das Wesen der Wissenschaft gehalten hat. In Deutschland selbst haben Männer von Geist solches längst schon anerkannt. Mögen also unsere Lehr-Amts-Kandidaten mit der Zeit fortschreiten und leisten, was von ihnen mit Recht verlangt werden kann. Es ist bei weitem nicht so schwer, als es dem, früher von schlechten Lehrern in der Mathematik Unterrichteten erschienen seyn mag, binnen 3 — 4 fleißig und eifrig benützten Universitäts-Jahren eine gehörige gründliche Kenntniß des dem Lehrer zunächst Nöthigen sich zu verschaffen. Und wenn man auch sagen kann, daß dann erst das eigentliche Studium der Mathematik beginnen könne, wenn man das, was in den Universitäts-Vorlesungen über niedere und höhere Mathematik gegeben wird, nicht blos verstanden, sondern durch selbstthätiges Wiederholen sich zu eigen gemacht hat, so ist dieß die Wiederholung einer Erscheinung, die jeder an sich machen kann, in jedem Fache, daß nehmlich dann erst seine wahre geistige Ausbildung beginnt, wenn er im Sinne des Universitäts-Bürgers ausstudirt hat.

Wer also in der Mathematik nicht wenigstens so weit gekommen ist, nach beendigtem Universitäts-Cursus, daß seine weitere Ausbildung durch eigenes Forschen und Streben in den höhern und höchsten Theilen der Wissenschaft vor sich gehen kann, der greife lieber zu einem andern Handwerk, als zu dem des täglichen Ableierns seiner eingelernten Materialien, oder er studire erst mit erneuter Regsamkeit, um den nothwendigsten und unerläßlichsten Grad von Tüchtigkeit sich zu erwerben.

Ferner muß der Vfr. als den jetzigen Bedürfnissen der Schulen entsprechend, von dem Lehr-Amts-Kandidaten der Ma-

thematik noch besonders verlangen, daß er weniger Eingelerntes inne habe, dagegen Ansichten, Denkfertigkeit, Consequenz; daß er einen klaren und nothwendigen Zusammenhang der einzelnen Theile nachweisen, einen und denselben Gegenstand unter vielen verschiedenen Formen, gegebenen verschiedenen Zwecken gemäß darstellen könne, und dgl. mehr; überhaupt und namentlich, daß er hinlänglich Pädagog sey, also auch, daß er sich der kindlichen und jugendlichen Fassungskraft anschmiegen könne. Er muß also darüber gelesen, gehört und gedacht haben, wie diese Fassungskraft eben durch den Unterricht nach und nach erhöhet, erstärkt, erkräftiget und kühn und sicher und schnell einem hochgesteckten Ziele entgegengeführt werden könne. *)

Endlich setzt der Vfr. eine zweckmäßige Vertheilung des mathematischen Unterrichts von Seiten des Lehrers voraus, ohne welche der Erfolg desselben immer mehr oder minder geschmälert seyn wird. Es muß nehmlich, der halbjährigen Versetzungen wegen, diese Vertheilung so statt finden, daß in jeder Klasse mit jedem halben Jahre [in geometrischer und in calculativer (arithmetischer, analytischer) Beziehung] der Cursus dieser Klasse beendigt ist, damit der neu hinzutretende Schüler sogleich thätig mit eingreifen könne. Dieß wird aber gerade dadurch möglich, daß die Klasse wöchentlich 6 Stunden Unterricht hat (wovon 3 dem geometrischen und 3 dem calculativen Unterricht ausgesetzt werden können) und — daß mehr der Geist als die Materie betrachtet

---

*) Auch der mathematische Lehrer möge nie vergessen, daß er nicht blos lehren, sondern auch erziehen soll, und daß das Niedrigste wie das Höchste seines Vortrags und seiner Wissenschaft nur beitragen soll, den Schüler zum Bewußtsein seiner selbst und seiner Kräfte, seiner Verhältnisse zur Natur, zur Gottheit und zu seinen Mitmenschen (also auch zum Staate) bewußt werden zu lassen, damit er sich dadurch neben dem Unendlichen vergessen, und zu jeder Anstrengung und Aufopferung für das Gute und Wahre, für Gott und seine Mitbrüder fähig machen lerne.

wird, daß nicht vielerlei, aber viel getrieben, nicht bloß unnütze mechanische Fertigkeit, sondern vorzüglich Fertigkeit im consequenten Denken bezweckt wird. *) Das Gymnasium muß einen guten Grund legen, auf welchem dann der Theolog, der Jurist, der Mediciner, der Mathematiker, der Philolog u. s. w. heranwachsen kann, von den Händen der Universität gepflegt. (Man lese hierüber die Vorrede zu dem ersten Bande meiner Elementar-Mathematik. Berlin 1825). — Uebrigens trägt eine solche Vertheilung, wie hier eben erwähnt worden, wesentlich bei, allgemeine Ruhe, Ordnung und gleichmäßige Theilnahme, Aufmerksamkeit und Liebe für den Unterricht hervorzubringen und zu erhalten.

Zuletzt setzt der Vfr. noch voraus, daß die Mathematik auf der Schule keiner bestimmten Anwendung wegen, z. B. blos um mit der Physik in Verbindung gebracht werden zu können, getrieben wird, sondern sich selber Zweck ist; weil außerdem der größte Theil der allgemeinen Bildung, welche durch den mathematischen Unterricht gewonnen werden soll, nothwendig verloren geht. — Der Lehrer der Physik muß jede Gelegenheit wahrnehmen, das Materielle der Mathematik, was seine Schüler durch den mathematischen Unterricht sich zu eigen gemacht haben müssen, anzuwenden, und es wird dieß den Schülern neuer Antrieb seyn, für den physikalischen und mathematischen Unterricht zugleich, obwohl vorzüglich für den physikalischen. Aber bedaurenswerth ist der, welcher dadurch Liebe für seinen mathematischen Unterricht sich verschaffen will, daß er die Anwendung oder An-

*) Fertigkeit im elementaren (mechanischen) Buchstaben- und Ziffer-Rechnen ist nothwendig; ja größtmöglichste Fertigkeit zu erzielen einer der Hauptzwecke des Unterrichts; aber nur in den sogenannten 4 Species, und da müssen häusliche Arbeiten, die der Lehrer controllirt, das Meiste thun.

wendbarkeit der Mathematik auf Physik geltend macht. Er wird seinen Zweck nimmer erreichen; denn die Liebe des Schülers für den mathematischen Unterricht hat ihren Grund nur in der befriedigenden Geistesthätigkeit desselben, zu welchem das Selbstauffinden der Wahrheiten, nach unveränderlichen, allgemeinen, gleich von vorne herein festgestellten und begriffenen Gesetzen, ohne Unterbrechung die Veranlassung wird.

Es ist bisher absichtlich nur von Gymnasien oder gelehrten Vorbereitungsschulen die Rede gewesen. Welche Voraussetzungen (in Bezug auf Anwendbarkeit der hier näher entwickelten Unterrichtsmethode) dürften aber bei den Elementar-Bürgerschulen, bei elementaren und höhern Gewerkschulen, Bauschulen, militärischen Schulen u. s. w. gemacht werden müssen? —

Um diese Frage gehörig in Erwägung ziehen zu können, mag man zuvor bemerken, daß der Mensch zu technischen Fertigkeiten auf zwei Wegen gebracht werden kann:

1) Wenn man ihn als eine Maschine betrachtet, die ein bestimmtes Geschäft zu verrichten hat, und die man nun dadurch dazu abrichtet, daß man dasselbe Geschäft unermüdet wiederholt, und immer wiederholt vornehmen läßt, bis solches zu verrichten ein aggregirender Bestandtheil des menschlichen Körpers geworden ist. *)

2) Oder wenn man den Menschen als einen geistig belebten Körper betrachtet, der in ersterer Beziehung etwas zweckmä-

*) So sind bis jetzt namentlich unsre Handwerker gebildet worden, oder sie werden noch so gebildet.

ßig erkennt und will, in letzterer Beziehung dagegen seinen Körper gewöhnen muß, diesen Willen zweckgemäß zu vollbringen.

Da nur diese letztere Weise der Würde des Menschen entspricht, so gehen wir nur auf diese ein. Es scheint aber hier wieder unterschieden werden zu müssen, die Schule, welche nur im Allgemeinen zu jedem beliebten technischen Geschäft vorzubereiten hat, und diejenige, welche bereits ein bestimmtes Fach, oder doch eine bestimmte Gattung technischer Geschäfte besonders im Auge hat, welche also Schüler zählt, die bereits allgemeine Bildung bis zu einem gewissen Grad sich zu eigen gemacht haben.

A) Vorbereitende Schulen (elementare und höhere Bürgerschulen, vorbereitende Gewerkschulen und dergl.), in welche der Schüler mit seinem 8ten, 9ten oder 10ten Jahre eintritt und bis zum 16ten wenigstens verweilt.

Für diese scheint genau dasselbe gelten zu müssen, was in Bezug auf Gymnasien oben gesagt worden ist, im Falle der mathematische Unterricht auf die Bildung der Schüler im Allgemeinen und besonders auch für ihre technischen Zwecke den größtmöglichsten Einfluß äußern soll.

Der Verfasser möchte hier die Beredsamkeit eines Demosthenes oder Cicero haben, um von unsern deutschen Schullehrer-Seminarien, Realschulen, Elementarschulen, Bürgerschulen überhaupt, das so häufig herschende Vorurtheil verbannen zu können, als müsse man statt der Elemente einer wissenschaftlichen Geometrie, geometrische Anschauungslehre, statt einer fast alle geistigen Kräfte des Menschen übenden streng wissenschaftlichen Mathematik überhaupt, nur einseitig und fast dürftig bildende Surrogate z. B. Combinationslehre (in dem hier möglicher Weise gemeinten Sinn), und oberflächliches Buchstaben- oder Zifferrechnen betreiben. Wir scheinen zwar diesen Fehlgriff dem um Menschen-

bildung so hochverdienten Pestalozzi, besonders aber seinem Freunde und Gehülfen Schmidt zu verdanken zu haben: sed non omnes omnia possumus. Hätten Pestalozzi oder Schmidt es erkannt, wie eine wissenschaftliche strenge Mathematik 10jährigen Kindern zugänglich und beliebt zu machen sey, so würde man nicht auf solche Abwege gerathen seyn. *) Es soll und kann hier nicht geläugnet werden, daß es nützlich, ja nothwendig ist, in dem Knaben die Sinne, das Combinations-Vermögen, das Gedächtniß u. s. w. f. zu bilden und zu üben. Auf der andern Seite kann aber doch auch nicht geläugnet werden, daß das Vermögen, zu abstrahiren und zweitens, abstrakte Begriffe wiederum auf bestimmte einzelne Fälle anzuwenden dem Menschen am aller unentbehrlichsten, zu gleicher Zeit aber dasjenige ist, was der größten Sorgfalt und Pflege bedarf, weil es sich nur sehr langsam und höchst unvollkommen von selber ausbildet, wie wir täglich hinreichend wahrnehmen können. Wird nun die Mathematik als ein Mittel betrachtet, diese letztgenannten Kräfte zu üben und zu stärken und gehörig auszubilden, so bildet sich, wenn nur der Lehrer den Zweck des Unterrichts immer im Auge behält, in der Geometrie das Anschauungs-Vermögen insbesondere, und in der gesammten Mathematik das Combinations-Vermögen, und so manche andere Kraft des Menschen zugleich mit aus, während umgekehrt, wenn letztere zuerst durch irgend der Mathematik entnommene Mittel zu bilden gesucht werden, der Schüler größtentheils für jede gründliche, wissenschaftliche und wahrhaft bildende Behandlung der Mathematik verloren geht. **) Allenthalben zu machende traurige Erfah-

*) Und Kinder unter 10 Jahren können durch ein gründliches Betreiben ihrer Muttersprache allein viel zweckmäßiger gebildet werden, als durch solche mathematische Spielereien.

**) Gegenwärtige Schrift hat gerade zum Zweck, über die Art und

rungen würden diese letzte Behauptung bestättigen, wenn sie auch nicht so einfach aus der Natur der Sache hervorginge. Umgekehrt bestättigt sich auch die erste Behauptung immer mehr und mehr, wo hie und da versucht wird, die Mathematik 10jährigen Knaben sogleich ganz gründlich (aber mit steter Rücksicht auf den Zweck, nehmlich der allgemeinen Bildung) zu behandeln, die Schüler selbstthätig eingreifen zu lassen, und ihr Abstractions-Vermögen, so wie nebenbei ihr Combinations- und Anschauungs-Vermögen, und auch ihr Gedächtniß, in Anspruch zu nehmen.

Was ferner die Anstalten betrifft, welche von diesem Theil der neuern Pädagogik noch nicht angesteckt sind, oder sich bereits wieder davon befreit haben, so könnte man vielleicht daselbst der Meinung seyn, daß die Schüler solcher Anstalten mehr auf praktische Kenntnisse hinzuarbeiten haben, daß Wissenschaftlichkeit und bloße Förderung der allgemeinen Bildung hier am unrechten Orte seyen, daß also der mathematische Unterricht sich mehr auf anschauliche Darstellung der Thatsachen, auf Fertigkeit im praktischen Rechnen (wozu man gewöhnlich auch die Buchstaben-Rechnung zählt) zu beschränken habe. — Allein, nur wo das Leben ist, da ist der Sieg. Ist es möglich, 10jährige Knaben über-

---

Weise des mathematischen Unterrichts in vorbereitenden Schulen (so wie über den ersten Unterricht in der Mathematik in Gymnasien) Andeutungen zu geben.

Der Verfasser selbst hat nie das Glück oder Unglück gehabt, Unterricht in der Anschauungslehre, geometrischen Combinationslehre, und wie dergleichen genannt werden mag, zu genießen, und doch getraut er sich noch immer besser zu combiniren, als z. B. der Verfasser einer geometrischen Combinationslehre, welchem Professor Rothe in dem Kastnerschen Archiv die vielen Unrichtigkeiten, fehlenden Fälle und dergl. sehr gründlich und bündig nachgewiesen hat. Was soll nun solcher Unterricht nützen, da bei dem Combiniren doch nichts weiter, als eben das Combiniren erlernt werden soll und kann, wenn der Lehrer selber und besonders derjenige, welcher Lehrer bilden soll, im Combiniren so sehr schwach ist?

haupt für ein gründliches Studium der Mathematik nicht blos zu befähigen, sondern auch zu begeistern, so ist es auch nothwendig, weil das Materielle sich nebenbei und von selbst mit ergibt und Fertigkeit im gemeinen (Zahlen- und Ziffern-) Rechnen ohne Zuziehung von Mathematik ohnedieß schon erworben worden seyn, oder doch noch erworben werden muß. Anschaulich und doch gründlich zugleich zu seyn, ist ja ohnedieß auch Hauptbedingung des Gymnasial-Lehrers. Also scheint für solche Vorbereitungs-Schulen durchaus kein anderer Weg betreten werden zu können als der für Gymnasien angedeutete.

B) Schulen für bereits mit einem gewissen Grad allgemeiner Bildung ausgestattete Schüler, zunächst für irgend einen Zweig des praktischen Lebens bestimmt. (Bauschulen, Forstschulen, Bergschulen, militärische Schulen, und dergl.).

1) Wenn, wie dieß gewünscht werden muß, die Schüler bereits wenigstens so viel geistvollen und erfolgreichen mathematischen Unterricht gehabt haben (in den vorbereitenden Schulen), als den obigen Andeutungen zu Folge, bis zur Prima exclus. eines Gymnasiums gelehrt werden soll.

In solchem Falle werden die später folgenden Theile der Wissenschaft in demselben Geiste, wie etwa in Prima eines Gymnasiums entwickelt, und man sieht mit der größten Sorgfalt darauf, daß das Denk-Vermögen des Zuhörers sich immer mehr übe und stärke, weil nur derjenige im praktischen Leben (das Civil oder Militär) überall zu Hause und an seiner Stelle seyn wird, der die Fertigkeit und die Gewandtheit sich verschafft hat, jeden gegebenen Fall sogleich selbstthätig zu zergliedern und zu behandeln. Also auch hier muß der wissenschaftliche belebende

Geist unbedingt vorwalten. Weil aber das Denk-Vermögen selbst sich nur dadurch üben und erkräftigen kann, daß es eine große Menge einzelner Fälle vornehme, zergliedere, und das Allgemeine auf sie anwende, und weil das Materielle dieser einzelnen behandelten Fälle zunächst als solches haften bleibt, so wird der Lehrer

α) überhaupt mehr Zeit auf diese Vorträge verwenden,

β) einen großen Theil der Zeit dazu benützen müssen, solche einzelne Fälle vorzüglich behandeln zu lassen, welche dem Schüler in seinem Lebensberufe am häufigsten vorkommen können.

2) **Wenn die Schüler nicht den unter (Nr. 1.) gemachten Voraussetzungen entsprechen, nur dürftige und nicht gehörig erworbene, mehr materiell, als geistig erfaßte Kenntnisse mitbringen (wie dieß zur Zeit gewöhnlich der Fall ist.)**

Dann werden solche Schulen Vorbereitungs-Schulen und, für das praktische Leben ausbildende zugleich sein müssen, so aber, daß der Zeit nach, die erstere der andern vorangeht.

Nimmermehr erwarte man einen bedeutenden Erfolg an solchen Anstalten, wenn man auf praktische Anwendbarkeit Rücksicht nimmt, ehe der Schüler die Mathematik in ihrer organischen Einheit erkannt, und so das belebende Princip in ihr erfaßt hat, ohne welches er immer nur im Praktischen eine Maschine seyn wird, die da ihre Dienste thut, wo sie eingerichtet ist, und an jeder andern Stelle, also fast in jedem Augenblicke seines beweglichen und bewegten praktischen Lebens ohne Thätigkeit und ohne Nutzen bleibt.

Solche Schulen leisten daher in mathematischer Beziehung selten, was von ihnen erwartet wird, und können im glücklichsten Falle nur die Hälfte dessen leisten, was eine unter (Nr. 1.) erwähnte Schule leisten müßte und z. B. die polytechnische Schule zu Paris früher geleistet hat. Meistens aber beschränkt sich der Nutzen solcher Schulen, wie wir sie aus Mangel gehöriger Vorbereitung gewöhnlich vor uns sehen (in mathematischer Beziehung) darauf, daß ein geistvoller Lehrer die schon erwachsenen und im allgemeinen nicht ungebildeten, nur mit geringen und wenig geistigen mathematischen Kenntnissen versehenen Schüler durch seine Vorträge anregt, den Privatfleiß fördert und regelt, das geistige Princip im Menschen mehr und mehr erweckt, und den Schüler dadurch zwingt, sich selbst durch Privatstudien oder Benützung anderer zweckmäßiger Hilfsmittel fortzuhelfen, und für sein praktisches Leben sich gehörig zu befähigen.

Der Verfasser weiß übrigens, daß seine Ansichten, und namentlich auch ein großer Theil der hier entwickelten, mit den gewöhnlichen nicht zusammentreffen. Dagegen will er auch gar nicht, daß diese seine Ansichten für unbedingt die richtigen gehalten, oder seine Vorschläge blind und ohne Prüfung oder Aenderung befolgt werden; sondern er will blos, daß überall das geistige Princip vorwalte und das bloße Kleben an Formen immer mehr vermieden werden möge, und in diesem Wollen stimmen ihm wenigstens die ausgezeichnetsten Geister der alten und der neuen Zeit bei. Ferner hat der Verfasser, als Lehrer der Mathematik unter den verschiedensten Verhältnissen, nicht blos eine Menge Erfahrungen gemacht, sondern auch die Erfahrungen anderer, nicht ohne Erfolg wirkender Lehrer mit den seinigen zu vergleichen gestrebt, und so hat er wenigstens die Ueberzeugung,

daß seine Meinungen und Ansichten nicht bloße reine Spekulationen sind, sondern fast alle, obwohl à priori begründet, auch durch die Erfahrung bestättigt. Und dieserhalb schmeichelt er sich, daß sein guter Wille, wenigstens hie und da Beifall finden, und als ein solcher anerkannt werden werde.

Specielle Einleitung.

Specielle Einleitung.

Zweck und Eintheilung des mathematischen Unterrichts. Allgemeine pädagogische Regeln.

§. 1. Zweck des mathematischen Unterrichts.

Der Zweck des mathematischen Unterrichts an allen vorbereitenden Lehr-Anstalten soll seyn:

I. Förderung der allgemeinen Ausbildung, besonders aber Uebung und Kräftigung des Abstraktions-Vermögens d. h. 1) des Vermögens zu abstrahiren, 2) des Vermögens, abstrakte Begriffe und Lehrsätze wiederum auf einzelne Fälle anzuwenden; dann auch des Anschauungs-Vermögens, des Combinations-Vermögens, etc. etc. etc.

II. Uebung in der Behandlung des Materiellen der Mathematik, theils um im Fortschreiten nicht gehindert zu seyn, theils, um Anwendungen auf das Leben oder auf andere Zweige des Wissens mit gehöriger Leichtigkeit machen zu können.

§. 2. Hauptzweck desselben Unterrichts.

Weil das Abstraktions-Vermögen nur geweckt, geübt und erkräftigt werden kann, indem irgend ein bestimmter Stoff zu Grunde gelegt, und dieser nun umfassend und nach allen Richtungen hin, zergliedert und zerlegt wird, so hat die Uebung des Abstraktions-Vermögens die Erreichung aller übrigen Zwecke zur Folge, sobald nur der Stoff so behandelt wird, daß eine wissenschaftliche, umfassende Kenntniß desselben möglich wird. — Der **Hauptzweck** des mathematischen Unterrichts bleibt daher:

Uebung und Kräftigung des Abstraktions-Vermögens, jedoch unter solchen Formen, daß nicht nur die übrigen Kräfte des Menschen möglichst viel mit ausgebildet, sondern auch das Materielle der Wissenschaft dem Schüler Eigenthum werde.

§. 3. Unerläßliche Bedingung zur Erreichung dieses Zweckes.

Zur Erreichung dieses Zweckes ist es unumgänglich nothwendig und erstes Erforderniß: daß die Mathematik als Wissenschaft ein in und durch sich zusammenhängendes Ganzes bilde, eine organisch gegliederte Einheit, und als solche gelehrt werde, damit der Schüler gleich von vorne herein einfache und allgemeine Sätze abstrahiren könne, welchen er nur überall die speciellen Fälle gehörig logisch unterordnen darf, um zunächst unter Leitung des Lehrers, die Sätze der Mathematik selbstthätig und sicher und umfassend ableiten zu können. *)

§. 4. Weitere Bedingungen zur Erreichung des gedachten Zweckes.

Ferner wird hier vorausgesetzt:

1) daß der Schüler ohngefähr im 11ten Jahre seines Lebens stehe, ehe der mathematische Unterricht bei ihm beginnt;

2) daß er dann wöchentlich 6 Stunden regelmäßigen wissenschaftlich mathematischen Unterricht erhalte (nicht Rechnen-Unterricht), wovon 3 Stunden zu den arithmetischen und 3 Stunden zu den geometrischen Theilen verwandt werden können;

3) daß der Schüler aus früherem Unterrichte bereits die größtmöglichste Fertigkeit im gemeinen Rechnen, und zwar vorzüglich in den 4 Species mit unbenannten ganzen und gebrochenen Zahlen, sich erworben habe, und daß der Rechen-Unterricht auf keine Weise mit Zuziehung mathematischer (von dem

---

*) Diese organische Einheit herzustellen ist der Hauptzweck der Lehrbücher des Verfs., und dieser Zweck der Grund, warum diese Lehrbücher von den gewöhnlichen häufig bedeutend abweichen müssen.

Schüler nicht verstandener) Theorien gegeben worden sey, sondern ohngefähr so, wie solches in dem kurzen, gründlichen und leichtfaßlichen Rechenbuche Berlin 1818 von dem Vfr. anzugeben, versucht worden ist; *)

4) daß kein neuer Schüler anders als nur bei'm Anfange des jedesmaligen Klassenkursus hinzutrete, und

5) daß mit jedem neuen halben Jahre der Kursus der Klasse ebenfalls jedesmal von vorne anfange, also daß der ganze Kursus in jeder Klasse nicht länger als ein halbes Jahr daure; **) endlich

6) daß die Klasse nicht mehr als 40, höchstens aber 50 Schüler habe.

Anmerkung. In den vorliegenden Bogen soll nun der erste Kursus (in der untersten mathematischen Klasse) näher beschrieben werden, während die übrigen Abtheilungen nur in kurzen Andeutungen und mit Verweisung auf die Lehrbücher des Verfrs. berührt werden können.

§. 5. Eintheilung der Mathematik.

Von der Größe (Quantum) abstrahirt man die Zahl (abstrakte, absolute ganze Zahl), und die Größe selbst wird dadurch zur Quantität (benannten Zahl). Dieser Ansicht zu Folge

---

*) Diese Fertigkeit im Ziffernrechnen und besonders in den 4 Species, muß so seyn, daß z. B. der Schüler Hunderte von unter einander gesetzten Ziffern fast eben so schnell summirt, als er sie überblickt, und dabei auf sein Resultat sich verlassen kann.

**) Der mathematische Unterricht an einer Anstalt muß daher in soviel Abtheilungen getheilt werden als mathematische Klassen vorhanden sind, und ein Schüler hört dann in jeder Klasse denselben Vortrag so oft, als die Zahl der Semester beträgt, welche er in dieser Klasse verweilt. Dies würde ihm langweilig werden, wenn er hörte; wird ihm aber gerade zum größten Vergnügen, wenn er nicht hört, sondern durchaus selber thätig ist; denn obgleich die Materie immer dieselbe bleibt, so wird die Behandlung doch immer neu und mit jedem neuen Semester auch immer (subjektiv) geistiger und gediegener seyn, also die Uebung fruchtbarer und dabei die Einprägung und Einübung des materiellen der Wissenschaft desto sicherer. Dabei zieht der ältere Schüler den jüngern unvermerkt mit sich fort.

wird hier die (abstrakte ganze) Zahl als der einfachere und einfachste, allgemeinste Begriff, die benannte Zahl dagegen, also die Quantität und in dieser Beziehung auch das Quantum, als der zusammengesetztere und der besondere, betrachtet.

Es steht daher in der wissenschaftlichen Zergliederung oben an:

A) die Lehre der (abstrakten oder absoluten ganzen) Zahlen, (welche in ihren verschiedenen Abstufungen Arithmetik, Algebra, Analysis u. s. w. genannt werden kann, und welche sich von der gemeinen Rechenkunst, und auch von der Buchstabenrechenkunst, so unterscheidet, wie die Wissenschaft von ihrer Anwendung).

Dann folgt in dieser naturgemäßen Ordnung:

B) die Lehre der Größen, und zwar
  a) der Größen im Allgemeinen (allgemeine Größenlehre, allgemeine Lehre der benannten Zahlen);
  b) der Größen ins besondere, (besondere Größenlehre, z. B. Raumgrößenlehre, Kraftgrößenlehre, u. s. w.).

§. 6. Eintheilung des mathematischen Unterrichts, in bloßer Beziehung auf wissenschaftliche Einheit.

Der Unterricht hat daher diese Theile in dieser Ordnung zu entwickeln, und zwar jeden Theil für sich jedesmal so weit, als er in der Anstalt verfolgt werden soll, ehe man zu dem nächsten Theil oder zu irgend einer seiner möglichen Unterabtheilungen übergeht.

§. 7. Eintheilung des Unterrichts, wie solchen die Pädagogik vorschreibt.

Es läßt sich aber ein Theil der elementaren Raumgrößenlehre, (welche unter dem Namen der Euklid'schen Geometrie bekannt ist) zwar nicht ohne die Zahl, doch aber ohne gerade eine Zahlenlehre voraussetzen zu müssen, also gewissermaaßen von der Zahlenlehre unabhängig, behandeln. Und weil die Raumgrößen versinnlicht werden können, und in so ferne den

noch zuviel an der Sinnlichkeit haftenden Schüler zunächst ansprechen, so dient eine zweckgemäße Behandlung dieses Theils der Mathematik (jedoch noch exclusive der Sätze von der Aehnlichkeit der Dreiecke, damit nicht Proportionenlehre vorausgesetzt werden muß) vorzüglich dazu, den Schüler nach und nach immer mehr von der Sinnlichkeit, mit welcher er zuerst die Raumgrößen umfaßt, loszureißen und zu abstraktern und allgemeinern Begriffen zu erheben. Deshalb ist es zweckmäßig, ja nothwendig, in der untersten Klasse sogleich, wie oben (§. 4. n. 2.) bereits bemerkt worden, diesen ersten Theil der Elementar-Geometrie, und die Anfangsgründe der wissenschaftlichen Zahlenlehre gleichzeitig vorzutragen. Und weil der Schüler sonach in beiden Abtheilungen zugleich vorschreitet, so erlernt er in der Zeit aus dem letztern Unterricht, was er zum Fortschreiten im ersteren braucht, und so können demnach nicht nur den ganzen ersten Kursus hindurch, sondern auch in allen folgenden Klassen, die arithmetischen Theile der Mathematik und die geometrischen, neben einander geduldet werden, obgleich sie an sich hintereinander folgen.

§. 8. Abtheilung dieser Bogen.

Die vorliegenden Bogen, welche vorzüglich die Absicht haben, die Art und Weise des mathematischen Unterrichts des Vfrs in der untersten mathematischen Klasse näher, wenn auch doch nur in Andeutungen, auseinander zu setzen, werden daher zwei von einander absichtlich abgesonderte Gegenstände behandeln, nehmlich:

α) den ersten Unterricht in der Zahlenlehre;

und β) den erstern Unterricht in der Raumgrößenlehre,

wobei man jedoch nicht vergessen muß, daß sie beide gleichzeitig in wechselnden Unterrichtsstunden und zwar jede in wöchentlich 3 Stunden, behandelt werden.

§. 9. Allgemeine Regeln.

Es werden aber bei dem Unterrichte ein für allemal und durchaus, und in jeder Unterrichtsstunde, folgende allgemeine Regeln befolgt:

1) Der Lehrer docirt so wenig wie möglich, ja fast gar nicht, sondern sucht die Schüler gleich in der ersten Stunde, nach und nach immer mehr in Selbstthätigkeit zu bringen. Den Schülern in der ersten Stunde sogleich Liebe für diesen Zweig des Unterrichts beizubringen, ist die größte und die schwerste Kunst des Lehrers. Es wird daher der Lehrer sich anfänglich mit ihnen unterreden, sich von ihnen (den 10 — 11jährigen Knaben) erzählen lassen, welche Begriffe sie ohngefähr von den Zahlen haben, theils um sich mit ihrer Begriffsfähigkeit bekannter zu machen, theils und besonders aber um nun seinen Unterricht ganz unvermerkt, in wechselseitiger Unterhaltung *), an das ihnen schon bekannte anknüpfen, was jetzt getrieben wird, von dem Leben und von früherem Unterrichte absondern und doch dieses abgesonderte anschaulich genug hinstellen zu können.

2) Der Lehrer sieht durchaus, in der ersten und in jeder der folgenden Stunden, auf gänzliche, vollkommene Sprachrichtigkeit in den Antworten, so daß (besonders anfänglich) jede Antwort vielleicht 4, 5 und noch mehre Male von dem Lehrer unrichtig verstanden wird (d. h. in einem Sinne, der sich der Antwort unterlegen läßt, der aber nicht der vom Schüler im Auge gehabte, oder von ihm auszudrückende ist), bis der Schüler (oder einer seiner Mitschüler) diese Antwort nach und nach selbst so lange verbessert hat, daß sie nun vollkommen sprachrichtig und der Frage entsprechend gefunden wird. **)

---

*) Daß der Lehrer dabei fortwährend die Schüler außer der Ordnung aufruft, und zwar jedesmal die unaufmerksamsten vorzugsweise, versteht sich von selbst, weil es zunächst erst darauf ankommt, allen Interesse für den Unterricht einzuflößen.

**) Es ist dies ohnehin der wichtigste Punkt bei jedem Unterrichte. Wer klare Begriffe hat, kann sich auch klar und bestimmt aussprechen. Und umgekehrt, wer lernt, sich völlig richtig und bestimmt auszusprechen, der bekommt auch gerade dadurch einen klaren und genauen Begriff des auszusprechenden Gegenstandes selbst.

Allererster Unterricht
in der
Zahlenlehre.

Erster Unterricht in der Zahlenlehre.

Erstes Kapitel.

Allgemeines Verhalten der Operationen gegen einander.

§. 10. Allgemeine Regeln für diesen Theil des Unterrichts.

Das erste und schwierigste ist 1) wenn der Schüler schon mathematischen Unterricht gehabt hat, ihn dahin zu bringen, daß er solchen als nicht vorhanden betrachte, und 2) ihn das Wesen einer wissenschaftlichen Zahlenlehre, und ihren Unterschied vom gemeinen Rechnen recht deutlich, wenn auch nicht umfassend, aber doch an einigen sehr anschaulichen und in die Sinne fallenden Fällen erkennen zu lassen.

In ersterer Beziehung kann der Lehrer nicht pedantisch genug seyn. Er muß jedesmal die Antworten der Schüler zurückweisen, welche aus irgend früherem Unterrichte herrühren, d. h. welche aus faktischen, dem Schüler bekannten Sätzen hervorgehen, die er hier aber noch nicht gehabt hat. Es ist nicht genugsam zu beachten, daß der Schüler nicht Sätze erlernen soll, sondern nur das consequente Denken, daß also nur auf letzteres allein zu sehen ist, weil das erstere sich nebenbei ergibt.

Was den zweiten Punkt betrifft, so kann der Lehrer gesprächsweise vom, den Schülern schon bekannten gemeinen Rechnen ausgehen, und sie so nach und nach dahin führen, daß für

die Zahlen gewisse Gesetze existiren *), daß also (außer dem Ausüben der Kunst mit den Zahlen praktisch zu rechnen) es auch noch wichtig seyn müsse, diese Gesetze und namentlich auch wiederum die praktischen Regeln des Rechnens, sowohl die dem Schüler schon bekannten, als auch neue, selbst erfinden zu können.

Dann erklärt der Lehrer weiter, wie man, eben weil man in der Mathematik (Arithmetik, oder wie er es sonst nennen mag) die Regeln des gemeinen Rechnens selber erst mit erfinden wolle, so lange hier Mathematik getrieben wird, das gemeine Rechnen nicht voraussetzen dürfe, ja nicht einmal die Kenntniß der Ziffern, die Null mit inbegriffen. So oft daher der Schüler im Verlaufe dieser oder der folgenden Stunden, gemeines Rechnen benützen will, oder nur eine Ziffer, so oft macht der Lehrer, es ihm nicht verstattend, wiederholt darauf aufmerksam, und hält mit Strenge darauf, daß nur immer auf dasjenige weiter gebaut werde, was in dem gegenwärtigen mathematischen Unterrichte bereits vorgekommen ist, und er wiederholt immer, daß der Unterricht gar keine, auch nicht die geringsten, Kenntnisse der Zahlen oder der Größen voraussetze; daß wir zur Zeit noch ganz unwissend sind, und nun nach und nach erst durch eigenes Nachdenken aus unserer Unwissenheit uns herausarbeiten wollen.

§. 11. Anfang des Unterrichts. **) Entwicklung des Begriffs der Summe.

L. Hier auf diesem Tisch denken wir uns einen Haufen von Groschen, wir wissen nicht wieviel; und einen zweiten Haufen,

---

*) Um dies anschaulich zu machen, kann man, irgend eine identische Gleichung zu Grunde legend, die Schüler ein und dieselbe Zahl aus gegebenen Zahlen, auf verschiedenen Wegen selber ausrechnen lassen. Die unerwartete Uebereinstimmung in den Resultaten, die man nachher noch für andere gegebene Zahlen nachweist, wirkt ungemein günstig für diesen Zweck.

**) Es muß hier wiederholt bemerkt werden, daß die hier folgenden Gespräche bloße Andeutungen geben, und vorzüglich dazu dienen sollen, den

von dem wir ebenfalls nicht wissen, wieviel er Groschen enthält; so sind hier zwei Zahlen, von denen wir noch gar nichts wissen. Wenn wir nun von diesen Zahlen mit einander reden wollen, so wird es bequem seyn, da wir gar nichts von ihnen wissen, die erste so lange wir von ihr sprechen, etwa durch p und die andere durch irgend einen andern Buchstaben zu bezeichnen, etwa durch q. Statt nun, wenn ich mit Euch rede, zu sagen: die Zahl der Groschen in dem ersten Haufen sage ich weit kürzer: die Zahl p, und Ihr wißt doch, welche Zahl, ob die Zahl der Groschen im ersten oder die im zweiten Haufen damit gemeint ist. Was denken wir uns dann bei q? — Sch. die Zahl der Groschen in dem zweiten Haufen. L. Also bezeichnet der Buchstabe q hier Groschen? Sch. Nein, sondern eine Zahl; die Zahl, welche anzeigt, wie viele Groschen in dem zweiten Haufen enthalten sind. L. Gut. — Wenn wir nun aber die beiden Haufen zusammenschieben, so daß ein einziger Haufen daraus entsteht, wie viel Groschen sind nun in diesem Haufen? Sch. Das können wir nicht wissen. L. Ich denke doch. Sind nicht so viele Groschen in dem neuen Haufen, als in den beiden erstern zusammengenommen waren? Sch. Ja, das wohl. L. Nun gut; mehr wollen wir nicht wissen. Wodurch werden wir aber diese neue Zahl bezeichnen, so lange wir hier von ihr sprechen wollen, damit wir uns kürzer und bequemer ausdrücken können. Sch. Wir können den Buchstaben r dazu nehmen. L. Auch jeden andern Buchstaben. Ich z. B. kann den Buchstaben r nicht gut leiden, weil es mir Mühe macht, ihn deutlich zu schreiben, ich nehme lieber a. Wir wollen also die Zahl der Groschen in dem neuen Haufen, so lange wir von ihr jetzt sprechen, durch a bezeichnen. Ist nun a eine Zahl? Sch. Ja. — L. Nein! es ist ein bloßes Zeichen, soll aber hier eine Zahl bezeichnen,

---

Geist dieses Unterrichtes näher und bestimmter hervortreten zu lassen. Jeder Lehrer, der sich diesen Geist angeeignet hat, wird dann für seinen jedesmaligen augenblicklichen Bedarf davon Gebrauch machen.

eben so wie p und q. Wenn wir also sagen: die Zahl a, so verstehen wir darunter, was? Sch. Die Zahl, die durch a bezeichnet worden ist. L. Gut, was wissen wir nun aber von dieser Zahl a? Sch. Sie hat so viele Einheiten als die Zahlen p und q zusammengenommen. L. Gut. *) Wir haben diese Zahl durch a bezeichnet; wir hätten aber eben so gut auch jedes andere Zeichen wählen können; und weil diese Zahl aus den beiden, durch p und q bezeichneten Zahlen entstanden ist, so scheint es am bequemsten zu seyn, auch das Zeichen dafür, aus den Zeichen p und q zusammen zu setzen, etwa pq oder p.q oder p|q u. s. w. Wir wollen, weil dies einmal gebräuchlich geworden ist, die so aus p und q entstandene Zahl durch $p+q$ bezeichnen, welches Zeichen wir p plus q aussprechen, und eine Summe nennen, während p und q allein die Summanden der Summe genannt werden mögen. — L. Was ist also $p+q$? Sch. Ein Zeichen, welches ausgesprochen wird: p plus q. L. Was bezeichnen wir damit? Sch. Eine Zahl, die so viel Einheiten hat, als die Zahlen p und q zusammengenommen haben. L. Was ist eine Summe? Sch. Eine Zahl. L. Nein! denn wir haben nicht die durch $p+q$ bezeichnete Zahl, sondern das Zeichen **) $p+q$ selbst eine Summe genannt. Und solltet Ihr das Wort Summe früher schon gehört und dort Euch etwas anders dabei gedacht haben, so müsset Ihr das zu vergessen suchen; denn sobald Ihr Euch bei irgend einem Worte z. B. Summe, welches

---

*) Der Schüler gibt in der Regel, wenn auch richtige, doch nicht so bestimmt ausgesprochene Antworten. Es ist aber sehr wichtig, daß der Lehrer sich nicht eher durch eine Antwort zufrieden stellen lasse, als bis sie völlig sprachrichtig und völlig bestimmt ausgesprochen ist.

**) Es ist dies nicht Pedantismus sondern, wie die Folge lehren wird, ein unumgänglich nothwendiger Punkt. Die Zahl 8 läßt sich denken als $5+3$, auch als $10-2$. Nur in ersterer Beziehung nennen wir sie eine Summe, also nicht die Zahl 8 selbst, sondern ihre Zusammensetzung aus 5 und 3. — Endlich lehrt die Erfahrung, daß wir in der gesammten Analysis nur das Verhalten der Operationen zu einander betrachten, also nur die Formen der Zusammensetzungen.

ich gebrauche, etwas anderes denkt, als ich mir dabei denke, so verstehen wir uns einander nicht mehr. Was ist also eine Summe? Sch. Ein Zeichen von der Form $p+q$? L. Was bezeichnet aber eine solche Summe $p+q$? Sch. Eine Zahl, und zwar diejenige die so viel Einheiten hat, als die beiden Zahlen p und q zusammengenommen haben. L. Gut. Nun aber merkt Euch noch ein Wort, nehmlich das Wort addiren. Wenn ich nehmlich sagen werde: man soll p zu q addiren, so verstehe ich nichts anders darunter, als man soll die Summe $p+q$ hinschreiben. Wer also schreiben kann, kann auch addiren. Was versteht Ihr nun darunter, wenn ich verlange daß b und c zu einander addirt werden sollen? — Sch. Ich denke mir darunter 1) daß b und c Zeichen sind, die Zahlen bezeichnen; 2) daß ich das Zeichen $b+c$ hinschreiben soll; 3) daß dieses Zeichen $b+c$ eine Summe genannt wird, und die Zahl bezeichnet, die so viel Einheiten hat, als die Zahlen b und c zusammengenommen haben. L. Sehr gut. Nur muß man sich auch noch merken, daß $b+c$ kein Buchstabe, sondern ein aus Buchstaben zusammengesetztes Zeichen ist, und besonders daß $b+c$ nur ein einziges Zeichen ist, und auch nur eine einzige Zahl bezeichnet.

§. 12. Fortsetzung. Entwicklung des Begriffes Gleichung.

L. Wir haben zwei Haufen Groschen gehabt; die Zahl der Groschen in dem ersten Haufen wurde durch p bezeichnet, die im zweiten Haufen durch q; die Zahl, welche durch Vereinigung der beiden Haufen in einen einzigen entsteht, wurde nachgehends von uns durch a bezeichnet; sie kann aber auch durch $p+q$ bezeichnet werden. Wir haben also in diesem Augenblick zwei Zeichen, erstlich a und dann auch $p+q$, welche eine und dieselbe Zahl bezeichnen sollen; dies merken wir uns dadurch, daß wir schreiben $a=p+q$, wobei das Zeichen (=) das Gleichheits-Zeichen heißt, während das Ganze eine Glei-

chung genannt wird. — Was lehrt uns also eine Gleichung? Sch. Daß zwei Zahlen einander gleich sind. L. Sehr schlecht gefaßt. Was wollet Ihr denn damit sagen: zwei Zahlen sind einander gleich? Ist nicht jede Zahl von jeder andern verschieden? — Noch einmal, was lehrt uns eine Gleichung $a = p + q$? Sch. Daß die zwei Zeichen a und $p + q$, links und rechts des (=) Zeichens, eine und dieselbe Zahl bezeichnen. L. Gut. Merket Euch aber dieses wohl. Wenn wir in der Folge von Gleichungen reden, und wenn wir in der Folge eine Gleichung haben werden, so soll und kann durch sie nichts anders ausgedrückt seyn, als daß zwei Zahl-Zeichen, welche links und rechts die Seiten der Gleichung bilden, so verschieden sie sonst seyn mögen, doch immer eine und dieselbe Zahl bezeichnen. L. Wenn wir also von zwei Zahlzeichen sagen, daß solche einander gleich sind, verstehen wir dann darunter, daß das eine, wie das andere ist? — Sch. Nein! sondern daß diese, in der Regel von einander gar sehr verschiedene Zeichen, doch eine und dieselbe Zahl vorstellen, ausdrücken oder bezeichnen. L. Richtig.

Nachdem der Lehrer die Gelegenheit wahrgenommen hat, zu bemerken, daß jedes Zeichen, in so ferne es eine Zahl ausdrückt, oder bezeichnet, ein Zahlzeichen, ein Zahlen-Ausdruck, oder schlechtweg ein Ausdruck genannt werden könne, fährt er weiter so fort:

§. 13. Summen von mehr als zwei Summanden.

L. Kann man auch mehr als zwei Zahlen addiren? Sch. Ja. L. Aus wieviel Summanden kann denn eine Summe bestehen? Sch. Aus so viel, als man will. L. Ihr gebt nicht gehörig Acht. Wir haben Summe genannt: jedes Zeichen von der Form $p + q$ oder $b + c$, u. s. w.; jede Summe hat also nur zwei Summanden. Jeder der Summanden aber bezeichnet eine Zahl, und kann daher wieder eine Summe seyn. In so ferne hat das Zeichen $(a + b) + c$ und auch das Zeichen $a + (b + c)$, wo die Klammern andeuten, wie solche Zeichen nach

und nach entstanden sind, eine völlig bestimmte Bedeutung, während das Zeichen $a+b+c$ (ohne Klammern) keine Bedeutung hat. Weil aber $(a+b)+c$ und $a+(b+c)$ und $(a+c)+b$ u. s. w., so verschieden sie an sich sind, doch einander gleich sind, d. h. eine und dieselbe Zahl bezeichnen (nehmlich immer die Zahl, die so viele Einheiten hat, als a und b und c zusammen genommen haben), so kann man dafür das Zeichen $a+b+c$ ohne Klammern wählen. Ein solches Zeichen $a+b+c$ oder $a+b+c+d$, u. s. w. hat dann auch eine völlig bestimmte Bedeutung, und wird eine Summe mehrerer Summanden genannt, und man hat sich dabei den Satz zu merken:

> wenn mehrere Zahlen a, b, c, etc. addirt werden, so ist es einerlei in welcher Ordnung man addirt, d. h. es ist allemal *)

$$(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c)= \text{etc. etc.}$$

§. 14. Entwicklung des Begriffes der Differenz.

In der dritten Unterrichtsstunde, oder nach Umständen in der 4ten, wird dann folgendermaaßen weiter fortgefahren **).

Wir haben zwei Zahlen, die eine sey durch a, die andere durch b bezeichnet. Denkt man sich nun, daß a mehr Einheiten hat wie b, so gibt es eine Zahl, deren Einheiten mit denen von b zusammengenommen die Einheiten von a ausmachen, und diese Zahl bezeichnen wir von nun an durch $a-b$ und wir nennen dieses Zeichen eine Differenz, so wie a den Minuen-

---

*) Dies sind die Formeln A. α. 1 und 2 der Formeltabelle.

**) Was in jeder Unterrichtsstunde vorgenommen ist, wird zu Ende derselben jedesmal nochmals kurz und vorzüglich in den Resultaten wiederholt, welches um so leichter geschehen kann, als sehr wenig materielles vorkommt. Und die Schüler müssen dann jedesmal solches in der nächsten Unterrichtsstunde schriftlich aufgesetzt mitbringen.

den und b den **Subtrahenden** *) dieser Differenz, und wenn ich verlange, daß b von a **subtrahirt** werden soll, so verstehe ich darunter, man soll die Differenz a — b hinschreiben. Was ist also eine Differenz? Sch. Eine Zahl. L. Nein, ein **Zeichen** von der Form a — b; aber was **bezeichnet** eine solche Differenz? Sch. Eine Zahl, deren Einheiten mit denen von b zusammengenommen, die von a ausmachen. L. Ja; man kann auch sagen, eine Zahl die zu b addirt, a gibt, wenn man nur, indem man sich so ausdrückt, das vorige darunter versteht.

§. 15. Erste Grundformel der Addition und Subtraktion.

L. Schreiben wir nun hin das Zeichen a — b + b, was **ist** und was **bezeichnet** solches? Sch. Das kann man nicht wissen; es ist weder eine Summe noch eine Differenz, weil man nicht die Form p + q und auch nicht bestimmt die Form p — q wahrnimmt. **) L. Gut. Aber wenn wir so schreiben

$$a - b + b$$
$$a - (b + b)$$
$$(a - b) + b,$$

so wissen wir von dem ersten dieser 3 Ausdrücke gar nichts; aber was **ist**, und was **bezeichnet** der zweite? Sch. Er ist

*) Alle Benennungen, was sie nach der hiesigen Definition bedeuten, muß der Schüler vor Allem seinem Gedächtniß wohl einprägen. Deshalb muß auch der Lehrer, so oft eine derselben wieder gebraucht wird, jedesmal ihre Bedeutung genau wiederholen lassen.

**) Wollten wir die Antwort so hinschreiben, wie man sie wirklich aus dem Munde des Schülers hört, d. h. wollte man jede Unterrichtsstunde wörtlich abschreiben, so würde dies eine Weitläufigkeit verursachen, welche unserem Zwecke gar nicht entsprechen würde. Es versteht sich daher von selbst, daß die meisten Antworten, wie wir sie hier dem Schüler unterlegen, nicht sogleich so bestimmt von dem Schüler ausgesprochen werden, und daß solche also nur die letzten Antworten sind, die der Lehrer durch wiederholtes zweckmäßiges Abfragen endlich herausbringen muß. Eher darf er nicht weiter fortschreiten.

eine Differenz und bezeichnet die Zahl, welche zu der Zahl $b+b$ (zu dem Subtrahenden) addirt, die Zahl a (den Minuenden) gibt. L. Gut; aber was ist und was bezeichnet der dritte Ausdruck $(a-b)+b$? Sch. Er ist eine Summe und bezeichnet die Zahl, die so viele Einheiten hat, als die Zahl $a-b$ (der eine Summand) und die Zahl b (der zweite Summand) zusammen genommen haben. L. Was wissen wir aber von $a-b$? Sch. $a-b$ ist eine Differenz und bezeichnet gerade die Zahl, die zu b addirt a gibt. L. Gut. Werden also die Zeichen $(a-b)+b$ und a einerlei oder verschiedene Zahlen bezeichnen? Sch. Eine und dieselbe Zahl. L. Wie bemerken wir uns das. Sch. Wir schreiben $(a-b)+b=a$. L. Was lehrt uns also die Gleichung $(a-b)+b=a$? Sch. Daß die beiden Ausdrücke $(a-b)+b$ und a, ohnerachtet sie von einander ganz verschieden sind, doch einander gleich sind, d. h. doch eine und dieselbe Zahl bezeichnen. L. Gut. Diese Formel (eine solche allgemeine Gleichung wird Formel genannt) schreiben wir uns in eine noch anzufertigende Tabelle, und schreiben nebenbei Ite Grundformel der Addition und Subtraktion. (S. Formeltabelle A. β. I.).

§. 16. Zweite Grundformel der Addition und Subtraktion.

L. Wenn ich aber nun die Gleichung

$$(a+b)-b=a$$

hinschreibe; ist diese Gleichung wohl richtig? Sch. Ja, denn es ist hier zuerst b addirt, und nachher dieselbe Zahl b wieder subtrahirt, folglich muß das a unverändert wieder herauskommen. L. Ei, ei, wie schlecht. Woher wissen wir denn das? Oder denkt Ihr das noch hieher, was Ihr vielleicht früher vom Addiren und Subtrahiren gehört, oder gedacht habt? Wir wollen ja dies eben hier erst näher untersuchen. — Ich werde also anders fragen. Was spricht die Gleichung $(a+b)-b=a$ aus? Sch. Daß die Differenz $(a+b)-b$ dieselbe Zahl bezeichnet

wie a. L. Nun, und welche Zahl bezeichnet denn die Differenz $(a+b)-b$? Sch. Die Zahl, die zu b addirt, die Zahl $a+b$ gibt. L. Was gibt denn nun der Ausdruck rechts, nehmlich a wenn solches zu b addirt wird? Sch. $a+b$. L. Die Differenz links $(a+b)-b$, und das a rechts bezeichnen also alle beide die Zahl, die zu b addirt, a gibt; also alle beide —? Sch. Eine und dieselbe Zahl. L. Offenbar. *) Diese Formel schreiben wir uns in die Tabelle unter dem Namen der IIten Grundformel der Addition und Subtraktion ein **). (M. s. in der Formeltabelle A. β. II.).

§. 17. Erster Lehrsatz der Addition und Subtraktion.

L. Nun will ich aber einmal die Gleichung hinschreiben

$$(a+b)-c=(a-c)+b;$$

wie werden wir es wohl anfangen müssen, um uns von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit derselben zu überzeugen? Sch. — —. L. Was soll denn eigentlich bewiesen werden? Sch. Daß die Ausdrücke $(a+b)-c$ und $(a-c)+b$ einander gleich sind. L. Was heißt das? Sch. Daß sie eine und dieselbe Zahl bezeichnen. L. Gut. Welche Zahl bezeichnet denn der Ausdruck links $(a+b)-c$? Sch. Weil solcher eine Differenz ist, so bezeichnet er die Zahl, die zu dem Subtrahenden c addirt, den Minuenden (d. h. die Zahl) $a+b$ gibt. L. Warum bezeichnet diese Differenz gerade diese Zahl? Sch. Weil wir dies so angenommen haben, und die zu erweisende Gleichung selber nur unter der Voraussetzung gelten kann und soll, daß die einzelnen

---

*) Bei einem wiederholten Vortrag derselben Lehren in einer der folgenden Klassen, kann man noch darauf aufmerksam machen, daß eigentlich vorher gezeigt werden muß, daß die größere Zahl mehr gibt, wenn sie zu einer und derselben addirt wird.

**) Beide Formeln I. und II. stellen die Definition der Subtraktion symbolisch dar, oder drücken den Gegensatz aus, in welchem die Addition und die Subtraktion zu einander stehen.

Zeichen in ihr, genau die ihnen früher gegebene Bedeutung haben. L. Nun Gut; wie werden wir es aber anfangen müssen, um einzusehen, daß der Ausdruck rechts $(a-c)+b$ dieselbe Zahl bezeichnet? Sch. Wir werden zusehen, ob er ebenfalls $a+b$ gibt, wenn die Zahl c zu ihm addirt wird. L. Richtig. Denn dann bezeichnen alle beide Ausdrücke links und rechts die Zahl, die zu c addirt, $a+b$ gibt, folglich eine und dieselbe Zahl. — Was erhalten wir denn aber, wenn wir c zu $(a-c)+b$ addiren. Sch. Die Summe $[(a-c)+b]+c$, welche die Zahl bezeichnet, die so viele Einheiten hat, als die Zahl $(a-c)+b$ und die Zahl c zusammengenommen haben. L. Richtig. Denn unter dem Worte addiren, verstehen wir nichts weiter, als diese Summe hinschreiben. Wir haben nun die Summe

$$[(a-c)+b]+c,$$

diese ist von $a+b$ offenbar verschieden, aber sie ist vielleicht dem $a+b$ doch gleich, d. h. sie bezeichnet vielleicht doch dieselbe Zahl wie $a+b$. Dieses muß also untersucht werden. Zu dem Ende müssen wir sehen, ob wir nicht für unsere Summe $[(a-c)+b]+c$ nach und nach immer andere und andere Ausdrücke setzen können, von denen wir aber überzeugt sind, daß sie alle noch dieselbe Zahl bezeichnen. Wir betrachten also unsre Summe, und sehen nach, wie jeder Summand entstanden ist; was finden wir da? Sch. Es ist erst zu der Zahl $a-c$, die Zahl b addirt, und zu dem was dann herauskommt ist noch die Zahl c addirt. L. Gut. Haben wir nicht für diesen Fall schon einen Lehrsatz gehabt? Sch. Ja, wenn mehrere Zahlen addirt werden, ist es einerlei in welcher Ordnung man addirt. (Formeltabelle A. α. 1. und 2.). L. Gut. Wenn wir also die 3 Zahlen $a-c$ und b und c, die in unsrer Summe zu einander addirt sind, in anderer Ordnung addiren etwa so

$$[(a-c)+c]+b,$$

was gilt von diesem neuen Ausdruck? Sch. Er ist von dem vorigen verschieden, aber ihm gleich, d. h. er bezeichnet nothwendig dieselbe Zahl, wie der vorhergehende. L. Gut. Eben so

wollen wir nun suchen, auch diesen Ausdruck wieder in einen andern zu verwandeln, welcher noch dieselbe Zahl bezeichnet. Wir betrachten also diesen Ausdruck auf's neue. Was ist er? Sch. Eine Summe; der erste Summand ist $(a-c)+c$, der andere ist b. L. Gut. Aber was ist denn der erste Summand und was können wir für ihn setzen, das ihm gleich seyn muß? Sch. Dieser Summand $(a-c)+c$ ist selber wieder eine Summe, die nach der Iten Grundformel (A. β. I.), weil zu einer Differenz $a-c$ ihr Subtrahend c addirt ist, der Zahl (dem Minuenden) a gleich seyn muß. L. In unserer Summe ist also der erste Summand gleich a, und der zweite ist b; folglich ist die Summe selbst gleich? Sch. $a+b$. L. Richtig. Dieses $a+b$ bezeichnet also noch immer dieselbe Zahl, wie $((a-c)+c)+b$ und daher auch wie $((a-c)+b)+c$; und wir sind also nun überzeugt, daß wenn man zu der Zahl rechts $(a-c)+b$, die Zahl c addirt, dann wirklich die Zahl $a+b$ herauskommt. Ist nun unsre Gleichung

$$(a+b)-c=(a-c)+b$$

nothwendig richtig? Sch. Ja, denn jeder der beiden Ausdrücke links und rechts des (=) Zeichens, bezeichnet die Zahl, die zu c addirt, $a+b$ gibt; folglich alle beide eine und dieselbe Zahl. L. Sehr gut.

§. 18. Wie wird jeder solche Lehrsatz angewandt.

Ehe nun der Lehrer zu einem folgenden Lehrsatz fortgeht, erklärt er erst, wozu man sich einer solchen erwiesenen Gleichung $(a+b)-c=(a-c)+b$ (eines solchen Lehrsatzes) in der Folge bedienen könne. Er macht die Schüler darauf aufmerksam, daß, so wie hier in dem so eben behandelten Satze, so in der gesammten Zahlenlehre, alles darauf ankomme, immer, wenn ein Ausdruck, wie hier $[(a-c)+b]+c$, gegeben ist, alle mögliche, von diesem verschiedene Ausdrücke angeben zu können, welche dem gegebenen gleich sind, d. h. welche genau die-

selbe Zahl bezeichnen. *) Dazu dienen aber solche Gleichungen, wie die hier erwiesene $(a+b)-c=(a-c)+b$. — Ist nehmlich der Ausdruck links gegeben, die Differenz $(a+b)-c$, so kann man sogleich den andern rechts, d. h. die Summe $(a-c)+b$ dafür setzen, weil beide, wie wir eben jetzt eingesehen haben, eine und dieselbe Zahl bezeichnen müssen. Eben so umgekehrt, wenn die Summe rechts $(a-c)+b$ gegeben ist, so kann man sogleich auch die Differenz links $(a+b)-c$ dafür setzen. — Der Lehrer erklärt dies hier nur ganz kurz; dagegen, sobald eine der bereits erwiesenen Gleichungen (Formeln, Lehrsätze) bei dem Beweise der folgenden angewandt wird, zeigt er, wie der Schüler bei der Anwendung derselben praktisch verfahren müsse, um zum Ziele zu gelangen, mit der nöthigen, und der, dem wichtigen Zweck entsprechenden Weitläufigkeit. (Jede Formel, so auch diese $(a-c)+b=(a+b)-c$, sobald sie erwiesen ist, wird übrigens in die Tabelle geschrieben, und bei dem Beweise jeder in der Tabelle folgenden Formel, kann dann jede der vorhergehenden angewandt werden). Wie nun der Lehrer dabei verfährt, diesen für die Folge so höchst wichtigen Punkt in's Reine zu bringen, mag hier gleich beschrieben stehen. Der Lehrer schreibt z. B. den Ausdruck

$$[(a-b)-c]+(b+c)$$

hin, und sagt: Nun, Kinder, will ich sehen, ob ihr mir dafür andere Ausdrücke setzen könnt, die nothwendig dieselbe Zahl bezeichnen. Wie wollt ihr das machen? Sch. Wir wollen erst sehen, was dieser Ausdruck ist. Er ist eine Summe, und der erste Summand ist eine Differenz $(a-b)-c$; der andere aber selber wieder eine Summe; folglich entsteht der ganze Aus-

---

*) Es kann nichts schaden wenn der Lehrer dem Schüler sogleich nachweist, daß er früher in der gemeinen Rechenkunst nichts anders getrieben habe. Man läßt ihn etwa 17 und 26 addiren, und indem er 43 dafür setzt, läßt man ihm bemerken daß dieses 43 auch ein bloßes Zeichen wäre, vier mal zehn und drei vorstellend, und welches noch dieselbe Zahl bezeichnet, welche die Summe $17+26$ ebenfalls bezeichnet haben würde.

druck, wenn zuerst zu der Zahl b, die Zahl c addirt wird, und dann dazu noch die Zahl (a — b) — c. Addiren wir daher diese 3 Zahlen b und c und (a — b) — c in einer anderen Ordnung, so erhalten wir,

$$([(a-b)-c]+c)+b.$$

Nun ist nach der Iten Grundformel (A. β. I.), $[(a-b)-c]+c$ dem Minuenden $a-b$ gleich; also der nächste gleiche Ausdruck jetzt $(a-b)+b$; und dieser ist wieder gleich a, nach derselben Grundformel. L. Ganz richtig. Aber findet noch mehr solcher Ausdrücke, die dem gegebenen

$$[(a-b)-c]+(b+c)$$

gleich seyn müssen. Sch. — L. Ist hier nicht der erste Summand $(a-b)-c$ eine Differenz, und dazu ist addirt die Zahl $(b+c)$? Sch. Ja. L. Nun habt ihr denn unter den Gleichungen der Tabelle, die schon erwiesen sind, keine, wo einer der Ausdrücke auch dadurch entsteht, daß zu einer Differenz eine Zahl addirt wird? Sch. Ja, die Formel (A. β. 1.) nehmlich:

$$(a+b)-c=(a-c)+b.$$

L. Gut. Was könnt ihr denn, für diesen Ausdruck $(a-c)+b$ setzen? Sch. Den andern links $(a+b)-c$, welcher nothwendig dieselbe Zahl bezeichnen muß. L. Was werdet ihr also hier für unseren Ausdruck

$$[(a-b)-c]+(b+c)$$

setzen können? Schüler geben eine verkehrte Antwort. L. Wir wollen ein einfacheres Beispiel nehmen. Ich gebe Euch den Ausdruck $(p-q)+x$; betrachtet nun wohl eure Formel (A. β. 1.), und sagt mir nun, was könnt ihr wohl dafür setzen. Sch. $(p+x)-q$. L. Recht. Aber wie habt ihr denn dieses $(p+x)-q$ bekommen? Sch. Ja, wir habens hier so ge-

---

*) Daß der Lehrer nicht immer alle Schüler zugleich fragt, sondern bald diesen bald jenen, und jedesmal denjenigen, dessen Aufmerksamkeit nachlassen will, und nur zuweilen eine Frage an Alle richtet, versteht sich wohl von selbst.

macht, wie dort in der Formel. L. Recht gut, wenn ihr nur auch mir sagen könntet, wie ihr's gemacht habt. Sch. —. L. Wenn wir den Ausdruck $(a-c)+b$ haben, so ist $a-c$ zu b, oder b zu $a-c$ addirt. Der Ausdruck $a-c$ ist eine Differenz, a der Minuend, c der Subtrahend; und der andere Ausdruck $(a+b)-c$ ergibt sich aus diesem $(a-c)+b$, wenn man die Zahl b (die zur Differenz $a-c$ addirt werden soll) zu dem Minuenden a dieser Differenz addirt, und den Subtrahenden c unverändert läßt.

Sollt ihr also x zu der Differenz $p-q$ addiren, so daß ihr habt $(p-q)+x$, so könnt ihr nach dieser wörtlichen Vorschrift diese Zahl x erst zu dem Minuenden p addiren, gibt $p+x$, und den Subtrahenden q als Subtrahenden beibehalten, und ihr erhaltet $(p+x)-q$. — Nun noch einmal zu unserem Ausdruck $[(a-b)-c]+(b+c)$. Was habt ihr hier? Sch. Es ist hier eine Zahl $b+c$ zu einer Differenz $(a-b)-c$ zu addiren; und wir können also nach der Formel (A. β. 1.), diese Zahl $(b+c)$ erst zu dem Minuenden $a-b$ addiren, gibt $(a-b)+(b+c)$ und dann den Subtrahenden c, als Subtrahenden, beibehalten. Wir erhalten also

$$[(a-b)+(b+c)]-c;$$

und dieser Ausdruck muß dem gegebenen gleich seyn, nach der vorhin erwiesenen Formel (A. β. 1.). L. Gut. Ihr seht also daß es gut seyn wird, wenn wir künftighin jede solche Gleichung, wie diese (A. β. 1.), nachdem wir sie erwiesen und in die Tabelle gesetzt haben, für die praktische Anwendung derselben, so wie hier, wörtlich ausdrücken.

Der Lehrer zeigt nun noch, wie dieselbe Formel von der linken Seite ausgehend, für den praktischen Gebrauch derselben wörtlich ausgedrückt werden könne, nehmlich: Eine Zahl c wird von einer Summe $a+b$ subtrahirt, wenn man diese Zahl c bloß von dem einen Summanden subtrahirt, und den andern Summanden unverändert läßt (als Summanden beibehält). — Hat man also z. B. $[(a+b)+c]-b$, so erhält man so-

gleich dafür $((a+b)-b)+c$, wofür dann sogleich wieder $a+c$ gesetzt werden kann, in so ferne alle diese Ausdrücke eine und dieselbe Zahl bezeichnen.

Der Lehrer wird übrigens auf diese Anwendungen, ihrer allzugroßen Wichtigkeit wegen, mehre Stunden verwenden, und, weil die Schüler anfänglich den wahren Geist derselben, zum Theil nicht sogleich erfassen, zum Theil aber wieder verlieren, so daß jedesmal auf's neue auf ihn hingewiesen werden muß, solche auf allen möglichen Seiten recht hervorleuchten lassen. — Deshalb mag auch noch folgende Wendung mit Vortheil gebraucht werden können. — Man schreibt die anzuwendende Gleichung hin, z. B.

$$\alpha) \ldots (a+b)-c=(a-c)+b$$

und den mittelst derselben zu verwandelnden Ausdruck auf beiden Seiten (oder in die Mitte einmal) darunter z. B.

$$\beta) \ldots ([(p-q)+r]-(s+r))+q,$$

und zeigt nun, daß der Ausdruck rechts in (α.), nehmlich $(a-c)+b$, zu gleicher Zeit der Ausdruck (β.) ist, wenn man sich nur unter a die Summe $(p-q)+r$, unter c die Summe $(s+r)$, und unter b die Zahl q vorgestellt denkt. Da nun der Ausdruck links in (α.), nehmlich $(a+b)-c$, dem Ausdruck rechts $(a-c)+b$ allemal gleich ist, was auch a, b und c vorstellen mögen, so ist derselbe Ausdruck

$$(a+b)-c$$

auch dem Ausdruck (β.) gleich, sobald man nur unter a, b, c gerade dasselbe sich denkt oder dasselbe statt a, b, c setzt, was unter a, b, c gedacht werden mußte, wenn der Ausdruck rechts $(a-c)+b$ zu gleicher Zeit der Ausdruck (β.) seyn soll. Daher erhält man für den gegebenen Ausdruck

$$\beta) \ldots ([(p-q)+r]-(s+r))+q$$

nach diesem Lehrsatz (A. β. 1.) oder (α.), den gleichen Ausdruck

$$\gamma) \ldots ([(p-q)+r]+q)-(s+r),$$

wofür nun wiederum neue gleiche Ausdrücke gefunden werden können.

Für $\delta) \ldots [(p-q)+r]+q$ erhält man nehmlich nach (A. α. 2.) den gleichen Ausdruck

$\varepsilon) \ldots [(p-q)+q]+r$

und [nach (A. β. I.) statt $(p-q)+q$, das gleiche p setzend] dafür wiederum den gleichen Ausdruck

$\zeta) \ldots p+r$,

so daß nun für (β.) oder (γ.) sich wiederum der gleiche Ausdruck

$\eta) \ldots (p+r)-(q+r)$

ergibt. Welcher Ausdruck aber diesem wieder gleich ist, kann erst aus spätern Lehrsätzen gefolgert werden.

Solcher Beispiele lasse man aber viele durcharbeiten; immer so, daß der Schüler von der Nothwendigkeit des Gefolgerten durchdrungen wird.

§. 19. Zweiter Lehrsatz der Addition und Subtraktion.

L. Schreiben wir nun die Gleichungen hin

$$a-(b+c)=(a-b)-c;$$

ist denn diese richtig? Sch. Wir müssen das erst untersuchen. L. Gut; wie wollt Ihr denn das anfangen? Sch. Wir fragen uns erst, was die beiden Ausdrücke links und rechts sind, und da finden wir, daß alle beide Differenzen sind. Es ist also $a-(b+c)$ eine Differenz und bezeichnet die Zahl, die zu dem Subtrahenden $b+c$ addirt, den Minuenden a gibt. L. Gut; wie kann man nun aber untersuchen, ob der Ausdruck rechts $(a-b)-c$ dieselbe Zahl bezeichnet? Sch. Wir müssen sehen, ob solcher, wenn dieselbe Zahl $b+c$ zu ihm addirt wird, auch dasselbe Resultat gibt. L. Richtig. Was erhalten wir aber durch die Addition? Sch. $[(a-b)-c]+(b+c)$ *) L. Worauf

*) Man kann sich solche Resultate von dem Schüler an die Tafel schreiben lassen. Am liebsten schreibe ich sie aber selbst hin, indem mir der Schüler diktiren muß, lasse aber dabei entweder alle Klammern ganz weg, oder setze wohl gar unrichtige, was denn von den Schülern erst verbessert werden muß; wobei ihnen jedesmal auf's neue eingeprägt wird, daß

kommt es nun an? Sch. Zu wissen, ob diese Summe dem a gleich ist. L. Gut. Wie wollt ihr euch aber davon überzeugen? Sch. Wir wollen für diesen Ausdruck $(a-b)-c)+(b+c)$, nach und nach immer andere und andere Ausdrücke setzen, von denen wir wissen, daß die immer noch dieselbe Zahl bezeichnen; vielleicht befindet sich dann der Ausdruck a darunter.

Wie man aber statt $[(a-b)-c]+(b+c)$, nach Formel (A. β. 1.), zuerst $[(a-b)+(b+c)]-c$, dann $[((a-b)+b)+c]-c$, dann $(a+c)-c$, endlich a setzen könne; oder, wie man statt $[(a-b)-c]+(b+c)$ zuerst nach (A. α. 2.) $([(a-b)-c]+c)+b$ dann $(a-b)+b$ und endlich a setzen könne, wird auf dieselbe Art von dem Schüler durch Fragen erhalten, wie solches (§. 18.) für denselben Ausdruck bereits geschehen ist. — Zuletzt wiederholt der Lehrer jedesmal das Ganze noch einmal, und bleibt bei der Frage stehen: warum ist nun die Gleichung

$$a-(b+c)=(a-b)-c$$

richtig? Sch. Weil beide Ausdrücke links und rechts zu einer und derselben Zahl $b+c$ addirt, eine und dieselbe Zahl a, als Resultat geben; weil also beide Ausdrücke links $a-(b+c)$ und rechts $(a-b)-c$ wirklich eine und dieselbe Zahl bezeichnen, was eben durch die Gleichung behauptet wurde.

Anmerkung. Das bisherige ist in den ersten 6 — 9 Unterrichtsstunden hinlänglich eingeübt. Der nun folgende (§. 20.) beginnt also ohngefähr in der 3ten oder 4ten Woche des Unterrichts.

---

jeder Ausdruck, der mit irgend einem andern durch ein Addition- oder Subtraktions-Zeichen verbunden werden soll, jedesmal in Klammern eingeschlossen werden müsse, weil man immer bestimmt wissen muß, wie der Ausdruck entstanden ist, in so ferne man nur dann auch bestimmt wissen kann, was er bedeutet.

§. 20. Verallgemeinerung der bisher gebrauchten Beweis-Methode.

L. Wenn ich nun irgend eine Gleichung hinschreibe, welche links und rechts Summen oder Differenzen enthält, und wenn Ihr Euch von der Richtigkeit derselben überzeugen wollt; wißt Ihr nun, wie Ihr das zu machen habt? Sch. Wir fragen uns zuerst, was die beiden Ausdrücke sind. L. Gut. Wenn nun einer von beiden links oder rechts eine Differenz ist, z. B. der Ausdruck rechts, wie werdet ihr nun weiter untersuchen? Sch. Wir werden fragen, was diese Differenz wohl bezeichnet, und uns erinnern, daß sie die Zahl bezeichnet, die zu dem Subtrahenden addirt, den Minuenden gibt. Dann werden wir zu dem Ausdruck links dasselbe (d. h. den vorigen Subtrahenden) addiren und wenn dasselbe Resultat (d. h. der vorige Minuend) sich ergibt, so sind wir überzeugt, daß beide Ausdrücke links und rechts eine und dieselbe Zahl bezeichnen. L. Sehr gut. Wir wollen solches einmal bei einigen Gleichungen noch wirklich versuchen. Schreiben wir die Gleichung $a-(b-c)=(a-b)+c$ hin. Ist diese richtig oder nicht? — — Ein ungewöhnlich dummer Schüler, der gerade gefragt wird, weis nichts vernünftiges zu sagen. Dann fragt der Lehrer weiter: Was ist der Ausdruck links? Sch. Eine Differenz. L. Was bezeichnet sie? Sch. Eine Zahl, die zu dem Subtrahenden $b-c$ addirt, den Minuenden a gibt. L. Wie willst du nun dich überzeugen, ob der Ausdruck rechts dieselbe Zahl bezeichnet? Sch. Ich werde ihn auch zu $b-c$ addiren und sehen, ob ebenfalls a herauskommt. L. Was erhältst du nun durch die Addition? Sch.

$$[(a-b)+c]+(b-c).$$

L. Was wirst du damit weiter anfangen? Sch. Ich werde suchen einen andern Ausdruck dafür zu setzen, der dieselbe Zahl bezeichnet. L. Gut, wie wirst du das aber machen? Sch. Ich frage mich, was der Ausdruck

$$((a-b)+c)+(b-c)$$

ist, und finde, er ist eine Summe, und der erste Summand

$(a-b)+c$ ist selbst wieder eine Summe; folglich entsteht der ganze Ausdruck, wenn man zu der Zahl $(a-b)$ zuerst c addirt, und dazu noch $b-c$. Ich kann aber dieselben 3 Zahlen $a-b$ und c und $b-c$ auch in anderer Ordnung addiren und zwar so (nach A. α. 2):

$$[(b-c)+c]+(a-b);$$

und hier ist der erste Summand nach der 1sten Grundformel (A. β. I.) gleich b, folglich erhalte ich die Summe

$$b+(a-b) \quad \text{oder} \quad (a-b)+b,$$

die noch immer dieselbe Zahl bezeichnet, wie

$$[(a-b)+c]+(b-c).$$

Daß aber $(a-b)+b$ wieder gleich a ist, folgt abermals aus der Iten Grundformel. (A. β. I.). L. Was hast du also nun gefunden? Sch. Daß in der Gleichung

$$a-(b-c)=(a-b)+c$$

jeder der beiden Ausdrücke links und rechts, zu $b-c$ addirt, a gibt, daß also beide eine und dieselbe Zahl bezeichnen, mithin die Gleichung richtig ist.

L. Nehmen wir nun noch eine Gleichung z. B.

$$(a-b)-c=(a-c)-b.$$

Wie wollt ihr diese Gleichung beweisen? Sch. —. L. Ihr versteht mich wohl nicht; ihr wißt nicht, was das heißt, beweisen. Wenn ihr Euch oder andere von der Richtigkeit einer Formel (Gleichung) so überzeugt, wie ihr davon überzeugt seid, daß ihr hier sitzt, so habt ihr die Formel bewiesen. — Nun wie werdet Ihr es anfangen, um die Gleichung

$$(a-b)-c=(a-c)-b$$

zu erweisen oder zu beweisen, d. h. euch oder irgend einen andern von der Richtigkeit dieser Gleichung zu überzeugen? Sch. Gerade so, wie wir das bei den vorhergehenden Gleichungen gemacht haben. L. Gut; aber zeigt mir doch auch, daß ihr es wirklich könnt. Sch. Der Ausdruck links $(a-b)-c$ ist eine Differenz, und bezeichnet die Zahl, die zu dem Subtrahenden c addirt, den Minuenden $a-b$ gibt. Sehen wir nun zu,

ob der Ausdruck rechts $(a-c)-b$, wenn dieselbe Zahl c zu ihm addirt wird, dasselbe Resultat $a-b$ geben wird. L. Gut. Wie nun weiter? Sch. Wenn zu dem Ausdruck rechts c addirt wird, so erhält man

$$[(a-c)-b]+c.$$

Nun muß ich sehen, ob ich nicht dafür einen andern Ausdruck finden kann, der nothwendig dieselbe Zahl bezeichnet. Zu dem Ende muß ich mich aber zuerst fragen, was dieser Ausdruck ist? — oder wie dieser Ausdruck entsteht, und da finde ich, daß eine Zahl c zu einer Differenz $(a-c)-b$ addirt ist. L. In welcher Formel, unter den schon erwiesenen ist dasselbe zu finden? Sch. In der Formel (A. β. 1.) rechts. L. Wie heißt der wörtliche Ausdruck dieser Formel? Sch. Eine Zahl b wird zu einer Differenz $a-c$ addirt, wenn man die Zahl zu dem Minuenden addirt, und den Subtrahenden unverändert läßt? L. Also hier bei unserm Ausdruck $[(a-c)-b]+c$? Sch. Wird die Zahl c zu dem Minuenden $a-c$ addirt und der Subtrahend b bleibt unverändert; das gibt $[(a-c)+c]-b$ oder nach der Grundformel (A. β. I.), $a-b$, welcher Ausdruck noch immer dieselbe Zahl bezeichnet; und die Gleichung

$$(a-b)-c=(a-c)-b$$

ist also richtig. L. Warum ist sie richtig? Sch. Weil beide Ausdrücke links und rechts zu derselben Zahl c addirt, dasselbe Resultat $a-b$ geben, folglich beide auch eine und dieselbe Zahl bezeichnen müssen.

L. Gut. Getraut Ihr Euch nun jede solche Gleichung zu erweisen? Sch. Ja. L. So schreibt einmal folgende (A. β. 2 — 4.) in euere Tabelle, schreibt mir die Beweise einer jeden zu Haus hübsch deutlich auf, und bringt sie mir mit. *) Oder

---

*) Diese Beweise werden in der Regel sehr schlecht geliefert, vorzüglich deshalb, weil die Schüler in ihrem Alter noch zu sehr mit der Sprache selbst zu kämpfen haben. Das schadet indessen nichts. Der Lehrer verbessert einige derselben in der Lehrstunde, indem er den ganzen Beweis, wie

erweist mir bis morgen nur zwei davon; die übrigen bringt ihr mir dann übermorgen.

§. 21. Schluß der Addition und Subtraktion.

Eine Klasse von 40 — 50 Schülern kann aber immer in 12 — 15 Unterrichtsstunden so weit gebracht werden, daß letztere die Beweise dieser Formeln der Addition und Subtraktion ziemlich gut liefern, und sich überhaupt in dergleichen Untersuchungen zu helfen wissen. Dabei gibt man ihnen täglich eine Uebersicht des bisher Geleisteten, und täglich die Ermahnung, ja nicht zu vergessen, daß wir von den Zahlen (also auch von der Rechenkunst) noch gar nichts wissen, nicht einmal die Null oder die Ziffern kennen, sondern nur das als bekannt und als wahr annehmen, was wir hier durch unser eigenes Nachdenken eingesehen und als wahr erkannt haben. — Die große Beweglichkeit solcher Schüler in solchen Klassen macht es auch nöthig, daß man dies nicht bloß sagt, sondern sie auch noch durch Fragen dergestalt in die Enge treibt, daß sie es selbst wiederholen müssen. Diese Fragen, auch nur ohngefähr hier wiederzugeben, würde aber eine unnütze Weitläufigkeit verursachen.

Noch ehe der Lehrer zur Multiplikation und Division übergeht, welches in der Regel zwischen der 12ten und 18ten Unterrichtsstunde geschehen muß, und nicht eher geschehen darf, als bis die Schüler den Geist des Ganzen gut aufgefaßt haben, und die Beweise der Formeln der Subtraktion gründlich führen können,

---

ihn der Schüler geliefert hat, die Tafel zu Hilfe nehmend, allen Schülern wiedergibt, und jedesmal, wo sich der Schüler schlecht ausgedrückt hat, oder gar unrichtiges sagt, bald den einen, bald den andern Schüler fragt, wie dieses gesagt oder gegeben werden müsse, wenn es richtig seyn soll. Dieselben Arbeiten werden dann noch einmal zu Hause aufgegeben mit der Ermahnung, sie besser zu bringen. Das nächstemal sieht der Lehrer wieder einige durch, und verfährt auf dieselbe Art. Die dritte, vierte Arbeit, wird dann schon zur Noth brauchbar; und das Ganze wird dadurch Eigenthum des Schülers, was er selbst erfunden zu haben glaubt und immer wieder erfinden kann.

ohne sich durch irgend dazwischen geworfene Querfragen irre machen zu lassen, frage man sie, wie viel solche Gleichungen es wohl geben werde; und weil diese Frage unbeantwortet bleiben wird, so zeige man ihnen, wie sich deren unendlich viele aufstellen lassen, bemerke aber auch, daß, in so ferne wir bloß Summen und Differenzen, bloß Addiren und Subtrahiren bis jetzt kennen, man zunächst nur so viele Formeln nöthig habe, um mittelst ihrer, einfachen Zahlzeichen und Summen und Differenzen paarweise addiren oder subtrahiren zu können; d. h. die durch diese Addition und Subtraktion entstehenden Summen und Differenzen in andere, ihnen gleiche Ausdrücke (Summen oder Differenzen) verwandeln zu können.

§. 22. Begriff der Multiplikation.

L. Wir haben zwei Zahlen a und b, und die Summe $a+a+a+\ldots+a$, von so vielen Summanden als b Einheiten; und da wollen wir der Kürze wegen diese Summe durch ein eigenes aus a und b zusammengesetztes Zeichen, nehmlich durch ba oder b.a oder b×a bezeichnen. Dieses Zeichen sprechen wir aus a mal b oder a mit b, nennen es ein Produkt, a den Multiplikanden, b den Multiplikator; und a mit b multipliciren soll nichts weiter heißen, als man soll das Produkt ba oder b.a oder b×a hinschreiben. Was verstehen wir also unter dem Worte Produkt? Sch. Eine Zahl. L. Nein. Wir verstehn darunter ein Zeichen von der Form p.q oder pq oder p×q. Was bezeichnen wir aber durch ein solches Produkt pq? Sch. Die Summe

$$q+q+q+\ldots+q$$

die so viele, dem Multiplikanden q gleiche Summanden hat, als der Multiplikator p Einheiten. L. Gut.

§. 23. Erster Lehrsatz der Multiplikation.

L. Wenn ich nun hinschreibe die Gleichung

$$m.(a+b)=m.a+m.b;$$

was ist hier der Ausdruck links? Sch. Ein Produkt; in welchem die Zahl $a+b$ der Multiplikand, die Zahl m dagegen der Multiplikator ist. L. Und was ist der Ausdruck rechts? Sch. Eine Summe. L. Und was sind die beiden Summanden ma und mb von dieser Summe? Sch. Produkte. L. Gut. Wie würdest du es aber anfangen, wenn du dich von der Richtigkeit der Gleichung $m.(a+b)=m.a+m.b$ überzeugen wolltest? Sch. Ich würde mich zuerst fragen, was das Produkt links, nehmlich $m.(a+b)$ bezeichne. L. Gut. Was bezeichnet es denn? Sch. Die Summe

$$(a+b)+(a+b)+(a+b)+\ldots\ldots+(a+b)$$

von m Summanden, und diese Summe kann ich also statt des Produktes $m.(a+b)$ setzen. L. Gut, wie aber weiter? Sch. Nun muß ich zusehen, was ich wiederum für diese Summe setzen kann, und was dabei doch noch immer dieselbe Zahl bedeutet. Zu dem Ende überzeuge ich mich, daß die Summanden dieser Summe selber wieder Summen sind, und daß daher diese Zahlen alle in beliebiger Ordnung addirt werden können. Addirt man aber erst alle a zusammen, so erhält man

$$a+a+a+\ldots+a,$$

deren Anzahl m ist, welche Summe daher kürzer durch das Produkt ma bezeichnet wird; eben so geben alle b zusammen addirt, das Produkt mb und die ganze Summe ist daher gleich $ma+mb$; so daß also $ma+mb$ noch immer dieselbe Zahl bezeichnet, die auch das Produkt $m.(a+b)$ bezeichnete. L. Ganz gut. Kann denn diese Gleichung

$$m.(a+b)=ma+mb$$

uns wohl etwas nützen? Sch. Ja; wir können wenn das Produkt links gegeben ist, die Summe rechts dafür setzen, und umgekehrt auch, wenn die Summe rechts gegeben ist, das Produkt links dafür substituiren, so nehmlich daß man immer überzeugt ist, einen Ausdruck zu haben, der noch dieselbe Zahl bezeichnet. L. Gut. Kannst du mir aber die wörtlichen Aus-

drücke dieser Formel hersagen, so wie wir sie für die Formeln der Subtraktion gehabt haben? Sch. Ja;

1) wenn der Ausdruck links als der gegebene betrachtet wird: Eine Summe $a+b$ wird mit einer Zahl m multiplicirt, wenn man jeden Summanden einzeln multiplicirt, und die Produkte ma und mb dann addirt;

2) wenn man von dem Ausdruck rechts ausgeht: Zwei Produkte ma und mb, welche einen gemeinschaftlichen Multiplikator m haben, werden addirt, wenn man die Multiplikanden a und b addirt und den gemeinschaftlichen Multiplikator m beibehält.

§. 24. Zweiter Lehrsatz der Multiplikation.

L. Könnt ihr mir nun vielleicht auch Ausdrücke finden, die dem Produkte $m(a-b)$ gleich seyn müssen? Sch. O ja; $m(a-b)$ ist ein Produkt, also bloß ein kürzeres Zeichen für die Summe

$$(a-b)+(a-b)+(a-b)+\ldots+(a-b)$$

von m Summanden, die wir also statt des Produktes setzen können. L. Richtig. Aber was könnt ihr wohl wieder für diese Summe

$$(a-b)+(a-b)+(a-b)+\ldots$$

von m Summanden setzen, was nothwendig noch dieselbe Zahl bezeichnet? Sch. Wir können das machen wie vorher, erst alle a addiren, das gibt ma, dann alle b addiren, gibt mb, und dann wieder subtrahiren, gibt $ma-mb$, welches man dafür setzen kann. L. Woher wißt ihr denn, daß dieses $ma-mb$ nun genau noch dieselbe Zahl bezeichnen müsse, als die Summe

$$(a-b)+(a-b)+(a-b)+\ldots?$$

Sch. Ja wir haben's gemacht wie vorher. L. Wenn ihr keinen andern Grund dazu hattet, als diesen, so habt ihr es sehr schlecht gemacht, und bewiesen, daß ihr ohne alles Nachdenken sprecht. Besinnt euch und macht es besser; denkt gehörig darüber nach. Müßt ihr nicht den Ausdruck, den ihr verwandeln wollt, vorher genau untersucht haben, damit ihr genau wißt,

wie er zusammengesetzt ist, weil ihr nur dann erst wiederum wissen könnt, was er bedeutet? Wie müßt ihr euch also fragen? Sch. Wir müssen erstlich wissen, daß der Ausdruck

$$(a-b)+(a-b)+(a-b)+\ldots$$

eine Summe ist, und dann müssen wir fragen, was ihre Summanden sind. L. Gut. Was sind diese? Sch. Differenzen. L. Nun wie weiter? Sch. Wir haben also hier Differenzen addirt und müssen daher unter den vorhergehenden Formeln der Tabelle diejenige aufsuchen, die uns lehrt, Differenzen zu addiren. *) L. Gut, welche findet ihr? Sch. Die (A. β. 4.) links. L. Gut; wie wird sie wörtlich ausgedrückt? Sch. Differenzen werden addirt, wenn man ihre Minuenden addirt, dann auch ihre Subtrahenden addirt, und dann die letztere Summe von der erstern subtrahirt. L. Wißt ihr nun, ob ihr vorhin, als $ma-mb$ heraus kam, es recht gemacht habt? Sch. Ja. Wir haben es so gemacht, wie es diese (erwiesene, also richtige) Formel vorschreibt. L. Was haben wir also nun gefunden? Sch. Die Gleichung

$$m(a-b)=ma-mb.$$

L. Gut. Schreibt sie auch in eure Tabelle. Ihr seht, daß ihr nun schon, wenn ihr wollt, solche Formeln selber erfinden könnt. Hätte ich die Gleichung $m(a-b)=ma-mb$ selbst hingeschrieben, so würdet ihr dasselbe gethan haben, um sie zu erweisen, was ihr nun gethan habt, um sie zu erfinden. Wer kann mir aber einen andern Beweis dieser Formel liefern? Ein Sch. Ich. Es ist der Ausdruck rechts eine Differenz; und da darf ich nur sehen, wenn zu dem Ausdruck links $m.(a-b)$, der Subtrahend rechts mb addirt wird, ob dann der Minuend rechts,

---

*) Der Lehrer wird öfter bemerklich machen lassen, daß die Formeln nicht lehren, wie man addirt, sondern wie man, durch Addition erhaltene Ausdrücke, in andere gleichbedeutende verwandelt, worauf es hier überall und einzig und allein ankommt; und daß man also diese und dergleichen Redensarten dahin zu deuten habe.

nehmlich ma sich ergibt. Addire ich aber, so erhalte ich die Summe $m(a-b)+mb$; und weil hier zwei Produkte addirt sind, so suche ich die Formel auf, die lehrt zwei Produkte zu addiren, und finde daß dies in der (B. α. 1) rechts der Fall ist. Diese Formel drücke ich wörtlich aus, und dann finde ich, daß man die beiden Multiplikanden $a-b$ und b addiren muß, gibt $(a-b)+b$ oder a, und dann den gemeinschaftlichen Multiplikanden m beibehält, wenn man einen gleichen Ausdruck haben will; und so erhält man also ma, welches noch der Summe $m(a-b)+mb$ gleich seyn muß.

L. Woran erkennen wir also, daß die Gleichung

$$m(a-b)=ma-mb$$

richtig ist? Sch. Weil beide Ausdrücke links und rechts zu derselben Zahl mb addirt, dieselbe Zahl ma geben, also eine und dieselbe Zahl bezeichnen müssen.

§. 25. Dritter Lehrsatz der Multiplikation.

L. Wenn a und b zwei beliebige Zahlen bedeuten, ist dann a mal b, soviel als b mal a? Sch. Ja. L. Warum? — Der Sch. wiederholt statt eines Grundes den Satz selbst wieder. Der Lehrer macht ihn darauf aufmerksam, daß er bloß deswegen werde Ja gesagt haben, weil er solches in dem Einmal Eins so gelernt habe, daß wir aber hier, von dem was er früher getrieben hat, gar nichts statt finden lassen können, weil wir das Alles, mit noch vielem Andern, erst erfinden wollen. L. Wir wollen es untersuchen, ob $ab=ba$ ist. Wie werden wir das anfangen? Sch. Wir fragen, was ist und was bezeichnet ab und finden, daß ab ein Produkt ist und die Summe $b+b+b+\ldots$ von a Summanden bezeichnet. L. Was sind denn aber die Summanden? Sch. Die einfache Zahl b. L. Was wissen wir von dieser? Sch. Nichts weiter als daß sie aus lauter Einheiten besteht. L. Gut. Addiren wir diese Einheiten in anderer Ordnung. Nehmen wir zuerst von jedem b in der Summe $b+b+b+\ldots+b$ von a Summanden,

die erste Einheit, und addiren sie zusammen, so erhält man 1+1+1+.... *) amal, d. h. die Zahl a. Eben so geben in jedem b die zweiten 1 zu einander addirt, wieder die Zahl a; und die dritten 1 in jedem b zu einander addirt, geben nochmal a, u. s. w. f., so daß man erhält a+a+a+.... von so viel Summanden als Einsen in b enthalten sind; d. h. von b Summanden; und für diese Summe kann man wieder setzen ba, welche Ausdrücke immer noch dieselbe Zahl bezeichnen müssen, so daß also seyn muß $ab=ba$. **)

§. 26. Vierter Lehrsatz der Multiplikation.

L. Welche Ausdrücke könnt ihr mir wohl finden, die dem Produkt c.(ab) gleich seyn müssen? Sch. Das Produkt c.(ab) hat die Zahl ab zum Multiplikanden und c zum Multiplikator und bezeichnet daher die Summe

$$ab+ab+ab+....+ab$$

von c Summanden. L. Gut. Wie muß man nun weiter fortfahren? Sch. Ich muß mich fragen, was in dieser Summe die Summanden sind, finde, daß sie Produkte sind, und weiß also nun, daß hier Produkte zu einander addirt sind. Ich suche daher unter den bereits erwiesenen Formeln diejenige auf, welche lehrt, wie Produkte zu einander addirt werden. L. Welche findet sich da? Sch. Die Formel (B. α. 1). L. Wie werden danach Produkte addirt? Wie kann die Formel wörtlich ausgedrückt werden? Sch. Produkte, ab, und ab, und ab,.... die einen gemeinschaftlichen Multiplikator a haben, werden addirt, wenn man die Multiplikanden addirt, gibt b+b+b+.... von c Summanden, und den Multiplikator a als solchen bei-

*) Das Zeichen 1 für die Einheit kann früher erklärt werden oder jetzt. Die Einheit ist ohnedies noch keine Zahl, sondern nur das Element aller Zahlen.

**) Der Lehrer bemerkt hier noch, daß man dieser Formel $ab=ba$ wegen, a und b auch ohne Unterschied die Faktoren des Produkts nenne.

behält; man erhält also hier a.(b+b+b+...+b). L. Gut. Dieser Ausdruck bezeichnet noch immer dieselbe Zahl, wie c.(ab). Aber was ist denn dieser Ausdruck

$$a.(b+b+b+....+b)$$

wiederum? Sch. Ein Produkt. L. Gut. Was ist aber sein Multiplikand? Sch. Eine Summe von c Summanden, wo jeder b ist. L. Was kann man also für diesen Summanden setzen? Sch. Das Produkt cb. L. Und was wird dann aus dem ganzen Ausdruck a(b+b+b+....+b)? Sch. Er geht über in a.(cb), d. h. a.(cb) bezeichnet noch immer dieselbe Zahl. L. Wovon haben wir uns nun überzeugt? Sch. Daß c.(ab)=a.(cb) seyn muß. *)

§. 27. Begriff der Division.

L. Das Zeichen $\frac{a}{b}$ habt ihr bis jetzt noch nie gesehen, (so müßt ihr euch das vorstellen) eben so wenig dieses andere a:b; ihr könnt also auch nicht wissen, was ich damit bezeichnen will, bevor ich euch das nicht gesagt habe. Ich spreche aber dieses Zeichen $\left(\frac{a}{b}\right.$ oder $\left.a:b\right)$ aus: a durch b, nenne es einen Quotienten, a den Dividenden, b den Divisor, und wir bezeichnen damit jedesmal nichts anders, als die Zahl, die mit dem Divisor b multiplicirt, den Dividenden a gibt. Auch verstehe ich unter Dividiren, d. h. wenn ich sage: man soll a durch b dividiren, nie etwas anders, als man soll den Quotienten (das Zeichen) $\frac{a}{b}$ oder a:b hinschreiben.

---

*) Hier bemerkt der Lehrer noch, daß sich diese letzte Formel auch erweitern lasse und dann wörtlich so ausgesprochen werde:

Wenn mehrere Zahlen mit einander zu multipliciren sind, so ist es einerlei, in welcher Ordnung man multiplicirt.

§. 28. Bemerkungen.

Der Lehrer fragt dies nun noch gehörig wiederholt ab und berücksichtigt dabei vorzüglich folgende Punkte:

1) daß der Schüler nie unter dem Worte Quotient die Zahl selber verstehe, sondern nur das Zeichen (die Art der Zusammensetzung);

2) daß der Schüler jedesmal noch besonders darauf hingewiesen werde, daß der Quotient $\frac{a}{b}$ oder $a:b$, eben so wie die Summe $a+b$, oder die Differenz $a-b$, oder das Produkt $a.b$ oder ab oder $a \times b$, jedesmal ein einziges Zeichen sey (obwohl aus Buchstaben u. s. w. zusammengesetzt) und eine einzige Zahl bedeute oder vorstelle, welche Zahl jedesmal auf eine, durch das Zeichen selbst genau bestimmte Weise, aus den beiden andern Zahlen a und b zusammengesetzt werden soll;

3) daß a durch b schon dividirt sey, sobald man das Zeichen $\frac{a}{b}$ oder $a:b$ nur hingeschrieben habe, eben so wie a zu b schon addirt, oder b von a schon subtrahirt, endlich a mit b schon multiplicirt ist, sobald man die Zeichen

$a+b$, $a-b$, $a.b$ oder ab oder $a \times b$

nur hingeschrieben hat;

4) daß aber unter dem hingeschriebenen Zeichen

$a+b$, $a-b$, $a.b$, $\frac{a}{b}$ jedesmal eine Zahl gedacht werden müsse, welche durch eine bestimmte Verbindung, und in jedem dieser 4 Fälle auch jedesmal durch eine andere Verbindung aus den beiden durch a und b vorgestellten Zahlen zusammengesetzt gedacht werden müsse; *)

---

*) Es kann nicht schaden, den Schüler jetzt schon darauf aufmerksam zu machen, daß man von den Operationen (Verbindungen) der Zahlzei-

5) daß der Schüler die Bedeutung der Worte Quotient, Dividend und Divisor, desgleichen Produkt und Faktor, ferner Differenz, Minuend und Subtrahend, endlich Summe und Summand, mit der größten Geläufigkeit und Bestimmtheit, so oft man ihn auch darüber fragen möge, anzugeben wisse, so wie die Bedeutungen des Quotienten, des Produkts, der Differenz und der Summe. *)

Der Lehrer wird ferner oft genug sich wiederholen lassen, daß, wenn hier vom Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren die Rede ist, solches jedesmal ein anderes sey, als in der gemeinen Rechenkunst; daß die gemeine Rechenkunst später erst aus dem, was jetzt getrieben wird, sich ergeben würde, und daß die Operationen des gemeinen Rechnens in der Folge aus den jetzt in Rede stehenden noch hervorgehen werden. **)

---

chen noch absondern könne und müsse, die Operationen (Verbindungen) der Zahlen selbst (nicht der Ziffern, welches auch wiederum nur Zahlzeichen sind), und daß letztere bloß darin bestehen, sich so zusammengesetzte Zahlen zu denken, während durch erstere, für diese so gedachten Zahlen, entsprechende Zeichen hingestellt werden.

*) Wenn irgend ein Schüler nicht recht mit fortkommen will, so ligt es immer bloß daran, daß ihm diese Begriffe noch nicht zur andern Natur geworden sind. Von diesem muß man sie daher noch öfter abfragen und mit Strenge darauf sehen, daß er sich solche zu Hause noch eigen mache.

**) Es kann auch nichts schaden, wenn der Lehrer hier schon zeigt, wie 24 und 37 addirt, eigentlich zunächst die Summen (das Zeichen) 24 + 37 geben; wie aber in der gemeinen Rechenkunst man nicht bloß diese Summe, sondern ein bereits wieder nach zehn geordnetes Zeichen haben will, nehmlich das Zeichen 61, welches dieser Summe 24 + 37 gleich ist, d. h. welches dieselbe Zahl bedeutet, als die Summe 24 + 37, welches dann freilich wieder die Zahl vorstellt, die so viel Einheiten hat, als die durch die Zeichen 24 und 37 vorgestellten Zahlen zusammen haben. Eben so kann man solche Andeutungen für die Subtraktion, Multiplikation und Division machen. Doch kann dies jetzt nur Beispielsweise geschehen und bloß historisch, und nur in der Absicht, den Schülern desto mehr Reiz für das folgende, und mithin desto größern Eifer für den Augenblick einzuflößen.

§. 29. Grundformeln der Multiplikation und Division.

L. Ist denn wohl die Gleichung

$$\text{I. } b\,\frac{a}{b} = a \quad \text{oder} \quad b(a:b) = a$$

richtig? Sch. Ja; denn es ist zuerst a durch b dividirt und hernach wieder mit b multiplicirt, also hebt sich das auf, und a bleibt. L. Wiederum sehr schlecht und unüberlegt. Wenn du diesen Augenblick zum erstenmale das Wort Dividiren und seine Bedeutung gehört hast, woher weißt Du denn jetzt schon, daß Dividiren und Multipliciren sich aufheben? Sch. Ja, das ligt eben in der Bedeutung des Wortes dividiren, die sie uns eben gegeben haben. L. So magst Du vielleicht Recht haben, allein dann mußt Du solches uns übrigen so handgreiflich machen, daß ein jeder von uns es auch wirklich einsieht, und wiederum jedem andern eben so handgreiflich machen kann. Was willst Du denn eigentlich untersuchen? Sch. Ich möchte wissen, ob das Produkt $b.\frac{a}{b}$ jedesmal genau dieselbe Zahl bezeichnet, die der Buchstabe a allein schon vorstellt. L. Gut. Wie nun weiter? Sch. Ich werde das Produkt $b.\frac{a}{b}$ nun näher untersuchen, d. h. ich werde nachsehen, was seine Faktoren sind. — Und da finde ich, daß der zweite Faktor $\frac{a}{b}$ ein Quotient ist und eine Zahl vorstellt, welche gerade so ist, daß wenn sie mit (dem Divisor) b multiplicirt wird, (der Dividend) a dann herauskommt. Und weil nun diese Zahl $\frac{a}{b}$ hier wirklich mit b multiplicirt ist, so muß natürlich diese Zahl a herauskommen. L. Ganz richtig. Wie würdest Du es aber anfangen, um uns zu überzeugen, daß auch

$$\text{II. } \frac{b.a}{b} = a \quad \text{oder} \quad (b.a):b = a$$

ist. Sch. Ich würde hier finden, daß der Ausdruck zur linken des (=) Zeichens, nehmlich $\frac{ba}{b}$ oder $(ba):b$ ein Quotient ist, und daher nichts anders vorstellen soll, als eine Zahl, welche, wenn man sie mit (dem Divisor) b multiplicirt, (den Dividenden) ba gibt. Und weil a mit b multiplicirt, in der That ebenfalls ba gibt, so kann die durch $\frac{ba}{b}$ vorgestellte Zahl keine andere Zahl seyn, als a selbst. L. Das scheint richtig zu seyn; allein mir doch noch nicht so ganz klar. Du sagst: weil $\frac{b\,.\,a}{b}$ und a Zahlen sind, so daß jede mit derselben Zahl b multiplicirt, auch dasselbe Resultat ba gibt, so müßte das jedesmal eine und dieselbe Zahl gewesen seyn. Muß denn das wirklich so seyn? Sch. Ja, denn eine größere Zahl mit derselben Zahl b multiplicirt, gibt mehr; eine kleinere gibt weniger.

Der Lehrer benützt diese Antwort, um den Schüler darauf aufmerksam zu machen, daß er eigentlich noch nicht wissen könne, was eine größere und eine kleinere Zahl sey, und woran sie erkannt werde. Er kann auch die Erklärung der größern und kleinern Zahl hier einschalten; die größere hat mehr Einheiten, wird also daran erkannt, daß zur kleinern noch eine Zahl addirt werden kann, bis die größere hervorgeht. Die Zeichen

$$a > b \quad \text{oder} \quad b < a \quad \text{oder} \quad a = b + q$$

sind daher gleichbedeutend, wenn nur a, b, q (absolute ganze) Zahlen vorstellen. Aus $a = b + q$ d. h. $a > b$ folgt aber

$$a + m = b + q + m = b + m + q, \quad \text{also} \quad a + m > b + m;$$
$$a - m = (b + q) - m = (b - m) + q, \quad \text{also} \quad a - m > b - m;$$
$$a\,.\,m = (b + q)\,.\,m = bm + qm, \quad \text{also} \quad am > bm.$$

Es kann aber Niemand dieses für überflüssige Pedanterie halten, der den wichtigen Punkt einsieht, daß es bei dem gesammten mathematischen Unterricht nur darum zu thun ist, den Schüler im consequenten Denken zu üben. Dies wird verfehlt, so oft

man sich irgendwo selbst eine, dem aufmerksamen Schüler immer bemerkbare Inconsequenz erlaubt.

Nach dieser Abschweifung faßt der Lehrer die **beiden Grundformeln** der Multiplikation und Division noch einmal auf, läßt sie unter diesem Namen in die Formel-Tabelle eintragen, und fragt etwa so weiter:

L. Wenn wir nun die Gleichung

$$\frac{ba}{b}=a$$

hinschreiben, ist denn diese von der vorigen $b.\frac{a}{b}=a$ verschieden? Sch. Ja. L. Was lehrt uns denn diese erste Grundformel $b.\frac{a}{b}=a$? Sch. Daß ein Quotient $\frac{a}{b}$ mit seinem Divisor b multiplicirt allemal den Dividenden a gibt. L. Und was lehrt uns die andere Gleichung $\frac{ba}{b}=a$? Sch. Daß ein Produkt ab durch einen seiner Faktoren dividirt, jedesmal den andern der Faktoren gibt.

§. 30. Erster Lehrsatz der Division.

L. Könnt ihr wohl jetzt schon, ohne daß ich euch noch etwas dazu sage, die Gleichung

$$\frac{a+b}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}$$

erweisen? Wer traut sich das zu? Ein Sch. Ich will es versuchen. L. Wie wirst du denn es anfangen? Sch. Ich frage mich, was die Ausdrücke links und rechts sind. L. Was ist denn der Ausdruck rechts, nehmlich $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}$? Sch. Eine Summe. L. Und der andere links, nehmlich $\frac{a+b}{m}$? Sch. Ein Quotient, und dieser bezeichnet die Zahl, die mit dem Divisor m multiplicirt, den Dividenden a+b gibt. L. Wie willst du

aber nun ersehen, ob der Ausdruck rechts $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}$ dieselbe Zahl bedeutet? Sch. Ich werde ihn auch mit m multipliciren und sehen, ob dasselbe Resultat $a+b$ sich ergibt. L. Sehr brav. Aber wie nun mit dem Multipliciren? Sch. Wenn ich $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}$ mit m multiplicire, so erhalte ich $m\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right)$. L. Worauf kommt es aber nun an? Sch. Ich muß nun suchen, dafür andere Ausdrücke zu setzen, von denen ich überzeugt seyn kann, daß sie noch dieselbe Zahl bezeichnen. L. Sehr gut; wie geschieht dies aber? Sch. Ich frage mich, wie unser Ausdruck $m.\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right)$ entsteht, d. h. was er ist, und was die Theile sind, aus denen er zunächst zusammengesetzt wird; und da finde ich, daß hier eine Summe mit einer Zahl multiplicirt ist. L. Weiter. Sch. Nun muß ich unter unsern Formeln der Tabelle diejenige aufsuchen, welche lehrt, wie eine Summe multiplicirt wird, und da finde ich, daß dies in der Formel (B. α. 1.) links der Fall ist. Nach dieser Formel wird eine Summe multiplicirt mit einer Zahl, wenn man jeden Summanden multiplicirt und die Produkte addirt. L. Was wirst du also statt $m.\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right)$ setzen können? Sch. $m\frac{a}{m}+m\frac{b}{m}$. L. Was kann man aber wiederum dafür setzen? Sch. Statt $m\frac{a}{m}$ kann man nach der ersten Grundformel der Division a, so wie statt $m.\frac{b}{m}$ auch b setzen, so daß man erhält $a+b$ als einen Ausdruck, der noch dieselbe Zahl bezeichnet. L. Was haben wir also nun eingesehen? Sch. Daß in der Gleichung

$$\frac{a+b}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}$$

der Ausdruck rechts $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}$, wenn solcher mit m multipli-

cirt wird, die Zahl $a+b$ gibt, daß also beide Ausdrücke links und rechts eine und dieselbe Zahl bezeichnen. L. Warum das letztere? Sch. Weil sie alle beide (d. h. jeder der beiden) mit einer und derselben Zahl m multiplicirt, ein und dasselbe Resultat $a+b$ geben. L. Ganz richtig. Ihr seht daraus, daß eigentlich nichts neues mehr kommt, sondern daß ihr Euch von der Richtigkeit der Formeln der Division auf dieselbe Art überzeugen könnt, wie wir uns von der Richtigkeit derer der Subtraktion überzeugt haben.

§. 31. Zweiter Lehrsatz der Division.

Nachdem der Lehrer diese Bemerkung gemacht hat, läßt er sogleich die folgende Formel

$$\frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}$$

auf demselben Wege erweisen, während er dabei nicht einen, sondern 5, 6 Schüler zum Beweise beitragen läßt.

Ist die Formel aber erwiesen, so fragt er noch, ob nicht einer der Schüler einen andern Beweis liefern könne. Sch. Ja, weil rechts eine Differenz ist. L. Nun, laß einmal hören. Sch. Der Ausdruck rechts $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}$ ist eine Differenz und bezeichnet die Zahl, die zu dem Subtrahenden $\frac{b}{m}$ addirt, den Minuenden $\frac{a}{m}$ gibt. Will man daher untersuchen, ob der Ausdruck links $\frac{a-b}{m}$ dieselbe Zahl bezeichnet, so darf man nur zu ihm ebenfalls $\frac{b}{m}$ addiren und zusehen, ob ebenfalls $\frac{a}{m}$ herauskommt. L. Was muß also jetzt geschehen? Sch. Ich muß $\frac{b}{m}$ zu $\frac{a-b}{m}$ addiren; dies gibt aber $\frac{a-b}{m}+\frac{b}{m}$. L. Und was mußt du jetzt thun? Sch. Ich muß sehen, ob

und was für andere Ausdrücke statt dieser Summe $\frac{a-b}{m}+\frac{b}{m}$ gesetzt werden können, die doch noch immer dieselbe Zahl bezeichnen. Dies kann ich aber immer dadurch erfahren, daß ich mich frage, wie mein Ausdruck $\frac{a-b}{m}+\frac{b}{m}$ entsteht, und da finde ich, daß hier zwei Quotienten addirt sind. L. Nun? Sch. Nun suche ich unter den bereits erwiesenen Formeln meiner Tabelle diejenige auf, die da lehrt wie 2 Quotienten addirt werden. L. Welche findest du da? Sch. Die vorhergehende (B. β. 1.), und zwar rechts. L. Was lehrt dich also diese Formel? Sch. Zwei Quotienten die einen gemeinschaftlichen Divisor haben, werden addirt, wenn man ihre Dividenden addirt, und ihren gemeinschaftlichen Divisor als Divisor unverändert beibehält. Wenn ich dieses hier auf die Summe $\frac{a-b}{m}+\frac{b}{m}$ anwende, so erhalte ich $\frac{(a-b)+b}{m}$, welcher Ausdruck noch dieselbe Zahl bezeichnet. L. Was wirst du aber damit nun weiter anfangen? Sch. Ich suche auf dieselbe Art, ob er nicht wieder auf's neue in einen andern verwandelt werden kann, der noch dieselbe Zahl bezeichnet. So wie ich ihn aber näher betrachte, so finde ich, daß sein Dividend $(a-b)+b$ dem a selbst gleich ist, und ich erhalte daher augenblicklich $\frac{a}{m}$, welches wieder ein anderes Zeichen ist, aber noch dieselbe Zahl bezeichnet, wie $\frac{(a-b)+b}{m}$, und wie $\frac{a-b}{m}+\frac{b}{m}$. L. Gut, wovon hast du dich nun überzeugt? Sch. Daß beide Ausdrücke

$$\frac{a-b}{m} \text{ und } \frac{a}{m}-\frac{b}{m}$$

Zahlen bezeichnen, so, daß jeder zu $\frac{b}{m}$ addirt $\frac{a}{m}$ giebt; daß also $\frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}$ seyn müsse. L. Sehr gut.

§. 32. Dritter Lehrsatz der Division.

L. Schreiben wir die Formel $m\frac{a}{b}=\frac{ma}{b}$ hin. Wie willst du dich von ihrer Richtigkeit überzeugen? Sch. Ich multiplicire den Ausdruck rechts $\frac{ma}{b}$ mit m und sehe, ob $\frac{a}{b}$ herauskommt. L. Wie kannst du so gedankenlos antworten? Warum willst du denn so verfahren? — Was lehrt die Gleichung? Sch. Daß beide Ausdrücke $m\frac{a}{b}$ und $\frac{ma}{b}$ einander gleich sind. L. Was heißt das? Sch. Daß sie eine und dieselbe Zahl bezeichnen. L. Gut. Welche Zahl bezeichnet denn der Ausdruck links, nehmlich $m\frac{a}{b}$? Sch. Die Zahl, die mit m multiplicirt $\frac{a}{b}$ gibt. L. Wie schlecht. Was ist denn der Ausdruck links? Sch. Ein Produkt. L. Gut. Was bezeichnet dieses Produkt $m\frac{a}{b}$? Sch. Die Summe

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\ldots\ldots+\frac{a}{b}$$

von m Summanden. L. Gut. Was ist denn aber in unsrer Gleichung der Ausdruck rechts $\frac{ma}{b}$? Sch. Ein Quotient. L. Was bezeichnet dieser? Sch. Die Zahl, die mit dem Divisor b multiplicirt, den Dividenden ma gibt. L. Richtig. Wie kann man nun untersuchen, ob die Gleichung richtig ist? Sch. Ich muß auch den Ausdruck links $m\frac{a}{b}$ mit b multipliciren und sehen ob ma herauskommt. L. Brav. Sch. Wenn ich aber multiplicire, so erhalte ich $b.\left(m.\frac{a}{b}\right)$, und da muß ich nun sehen, welche Ausdrücke wiederum dafür gesetzt werden können, die noch dieselbe Zahl bezeichnen. L. Wie wirst du das machen?

Sch. Ich untersuche, wie mein Ausdruck $b.\left(m.\frac{a}{b}\right)$ entstanden ist, und da finde ich, daß zuerst die Zahl $\frac{a}{b}$ mit der Zahl m und dann, was herauskommt noch mit der Zahl b multiplicirt wird. Nun kann ich nach der Formel (B. α. 4.) auch in anderer Ordnung multipliciren und erhalte dann $m.\left(b.\frac{a}{b}\right)$; und dafür sogleich ma. L. Ist denn nun die Gleichung $m\frac{a}{b}=\frac{ma}{b}$ richtig? Sch. Ja; denn beide Ausdrücke links und rechts, mit b multiplicirt, geben ein und dasselbe Resultat ma. L. Ganz gut. — Nützt uns aber wohl diese Formel zu etwas? Sch. Ja, wie jede solche Formel. Wenn ich irgendwo das Produkt $m\frac{a}{b}$ habe, so kann ich sogleich den Quotienten $\frac{ma}{b}$ dafür setzen und umgekehrt, und ich bin überzeugt, daß ich doch noch immer, zwar einen andern Ausdruck, aber dieselbe Zahl habe. L. Wenn Du also hattest z. B. den Ausdruck $\frac{ad}{b}.\left(\frac{b}{d}\right)$ konntest Du wohl einen andern dafür setzen, von dem Du überzeugt wärst, daß er noch dieselbe Zahl bezeichne? Sch. Ja. Ich betrachte $\frac{ad}{b}$ als eine einfache Zahl, und $\frac{b}{d}$ als einen Quotienten und frage mich nun, wie wird ein Quotient $\frac{b}{d}$ mit einer Zahl $\frac{ad}{b}$ multiplicirt? L. Nun, wie geschieht dies? Sch. Ich suche die Formel auf, die solches lehrt, und da finde ich eben die gerade erwiesene $m.\frac{a}{b}=\frac{ma}{b}$ und zwar links. L. Was lehrt sie uns von dieser Seite? Sch. Ein Quotient $\frac{a}{b}$ wird mit

einer Zahl m multiplicirt, wenn man die Zahl m mit dem Dividenden a allein multiplicirt, und den Divisor b unverändert läßt (als Divisor). L. Wie kommst du darauf, diese Regel so anzugeben? Sch. Ja, wenn ich es so mache, so bekomme ich aus $m.\frac{a}{b}$ gerade $\frac{ma}{b}$, und das ist eben der Ausdruck rechts, von dem ich weiß, daß er dieselbe Zahl bezeichnet, wie der andere links, den ich gegeben hatte. L. Gut. Wenn du dasselbe nun auf das Produkt $\frac{ad}{b}.\frac{b}{d}$ anwendest, was wirst du erhalten? Sch. $\frac{\frac{ad}{b}.b}{d}$. L. Richtig. Was wirst du aber wieder dafür setzen können? Sch. Dieser Ausdruck ist ein Quotient und sein Dividend scheint sich vereinfachen zu lassen. L. Was ist dieser Dividend $\frac{ad}{b}.b$? Sch. Ein Produkt, und solches ist $=ad$, nach der ersten Grundformel (B. β. I.), und weil man nach (B. α. 3.) zunächst $b.\frac{ad}{b}$ dafür setzen kann. L. Gut. Was wird also aus unserm obigen Quotienten $\frac{\frac{ad}{b}.b}{d}$? Sch. $\frac{ad}{d}$ oder a, nach der zweiten Grundformel (B. β. II.). L. Was finden wir also statt $\frac{ad}{b}.\frac{b}{d}$, so daß es noch immer dieselbe Zahl bezeichnet? Sch. Zuerst $\frac{\frac{ad}{b}.b}{d}$; dann $\frac{ad}{d}$; zuletzt a. L. Brav. Ihr seht hieraus auf's neue, wie wir uns unsrer erwiesenen, d. h. als richtig erkannten Formel beständig dazu bedienen, um irgend einen Ausdruck, der gegeben ist, in andere und andere zu verwandeln, doch so, daß wir im-

mer überzeugt sind, bei jedem neuen Ausdruck noch dieselbe Zahl zu haben.

§. 33. Vierter Lehrsatz der Division.

L. Beweist mir nun einmal diese Gleichung $m\frac{a}{b} = \frac{a}{b:m}$. Sch. Der Ausdruck rechts ist ein Quotient und bezeichnet die Zahl, die mit der Zahl $\frac{b}{m}$ (mit dem Divisor) multiplicirt, den Dividenden a gibt. Also multiplicire ich den Ausdruck links $m\frac{a}{b}$ mit derselben Zahl $\frac{b}{m}$ und sehe, ob dasselbe Resultat a herauskommt. L. Wie nun weiter? Sch. Wenn ich multiplicire, so erhalte ich $\frac{b}{m}\left(m.\frac{a}{b}\right)$ und dafür sogleich wieder $\left(m.\frac{b}{m}\right).\frac{a}{b}$; und dafür wieder $b.\frac{a}{b}$, wofür sogleich a gesetzt werden kann. Also ist unsre Gleichung richtig. L. Warum ist sie richtig? Sch. Weil beide Ausdrücke links und rechts des (=) Zeichens, mit $\frac{b}{m}$ multiplicirt, dasselbe Resultat a geben; folglich beide eine und dieselbe Zahl bezeichnen müssen. L. Ganz richtig. — Glaubt ihr nun jede Formel der Division, die ich euch hinschreiben möchte, erweisen zu können? Sch. Ja. L. Wie werdet ihr das denn anfangen? Sch. Wir sehen nach, auf welcher Seite ein Quotient ist; dann nehmen wir den Divisor desselben, multipliciren ihn mit dem Ausdruck auf der andern Seite des (=) Zeichens, und sehen zu, ob der Dividend unsers Quotienten herauskommt. Bei dem Multipliciren selbst wenden wir aber immer unsre bereits erwiesene Formeln an, um den Ausdruck, den wir zuerst erhalten, immer in einen andern verwandeln zu können, der noch dieselbe Zahl bezeichnet. L. Recht brav. Aber wenn ich euch gebe die Gleichung

$$m.\frac{a}{b}=a.\frac{m}{b}?$$

Sch. Hier ist jeder Ausdruck links und rechts ein Produkt. L. Also werdet ihr hier nicht so verfahren können? Sch. Nein; — und doch — wir können ja links und rechts mit b multipliciren, und sehen, ob ein und dasselbe Resultat herauskommt. L. Richtig. Nun versucht es einmal. Sch. Wenn ich links mit b multiplicire, so erhalte ich $b.\left(m.\frac{a}{b}\right)$; dafür $m.\left(b.\frac{a}{b}\right)$; und dafür ma. L. Wenn du aber den Ausdruck rechts auch mit b multiplicirst? Sch. Da erhalte ich $b.\left(a.\frac{m}{b}\right)$ und dafür $a.\left(b.\frac{m}{b}\right)$ oder am oder ma; also dasselbe, was links. L. Ist denn nun die Gleichung $m\frac{a}{b}=a\frac{m}{b}$ richtig? Sch. Ja; denn beide Ausdrücke $m.\frac{a}{b}$ und $a.\frac{m}{b}$, mit b multiplicirt, geben ein und dasselbe Resultat ma; folglich müssen sie beide eine und dieselbe Zahl bezeichnen.

§. 34. Fortsetzung.

Der Lehrer diktirt nun die übrigen Formeln, und läßt sie in die Tabelle schreiben, und dann nach und nach zu Hause von den Schülern schriftlich erweisen, welche schriftliche Arbeiten wieder so, wie früher beschrieben worden, verbessert werden. Bei dem Beweise einer jeden Formel darf der Schüler alle in der Tabelle vorhergehende gebrauchen aber keine erst folgende. Manche dieser Formeln sieht sich der Lehrer gezwungen noch besonders in der Stunde beweisen zu lassen. Z. B. Die Formel

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}.$$

L. Wie kann man sich von der Richtigkeit dieser Gleichung überzeugen? Sch. Man muß den Ausdruck rechts $\frac{a}{b}.\frac{d}{c}$ noch

mit dem Divisor $\frac{c}{d}$ links multipliciren, und zusehen, ob der Dividend $\frac{a}{b}$ links herauskommt. L. Warum ist dann die Gleichung richtig? Sch. Weil dann die beiden Ausdrücke links und rechts mit der Zahl $\frac{c}{d}$ multiplicirt, dieselbe Zahl $\frac{a}{b}$ als Resultat geben. L. Gut. Was gibt denn nun die Multiplikation? Sch. Zuerst $\frac{c}{d}.\left(\frac{a}{b}.\frac{d}{c}\right)$ und dann $\frac{c}{d}.\frac{ad}{bc}$; hernach, indem man $\frac{ad}{bc}$ als einen Quotienten, $\frac{c}{d}$ aber als eine einfache Zahl betrachtet, nach der Formel (B. β. 3.) links $\frac{\frac{c}{d}.(ad)}{bc}$, hierauf $\frac{\left(\frac{c}{d}.d\right)a}{bc}$, dann $\frac{c.a}{b.c}$. L. Was ist nun dieser Ausdruck? Sch. Ein Quotient. L. Betrachte nun einmal den Dividenden ca als ein einfaches Zahlzeichen; was ist der Divisor? Sch. Ein Produkt. L. Wie wird eine Zahl ca durch ein Produkt bc dividirt? Sch. Nach der Formel (B. β. 7.) rechts. Man muß die Zahl ac erst durch den einen Faktor c dividiren, dann was herauskommt noch durch den andern Faktor b. L. Gut. Was erhält man also hier statt $\frac{ac}{bc}$? Sch. Zuerst $\frac{\left(\frac{ac}{c}\right)}{b}$ dann $\frac{a}{b}$. L. Wovon hast du dich nun überzeugt? Sch. Daß $\frac{a}{b}.\frac{d}{c}$, wenn solches mit $\frac{c}{d}$ multiplicirt wird, die Zahl $\frac{a}{b}$ gibt; daß also unsre Gleichung $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}$ richtig ist. *)

---

*) Der Lehrer beschränkt den Schüler nie im Auffinden seiner Beweise. Nur sieht er mit Sorgfalt darauf, daß der Schüler, wie er es auch

Um die Schüler dahin zu bringen, daß sie alle die Formeln der Multiplikation und der Division fertig beweisen können, verbraucht der Lehrer höchstens 6 — 8 Unterrichtsstunden, weil das meiste durch häusliche Arbeiten bewirkt wird, in so ferne der Gang genau derselbe bleibt, wie solcher bei der Addition und Subtraktion befolgt worden ist, die Schüler daher bereits durch den vorhergehenden Unterricht, mit dem was sie jetzt treiben sollen, vertraut geworden sind.

Zuletzt bemerkt der Lehrer noch, daß er so viele Formeln in die Tabelle aufgenommen habe, als nöthig sind, um mittelst ihrer, eine einfache Zahl, eine Summe, Differenz, Produkt und einen Quotienten paarweise addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren zu können. Dann geht er sogleich weiter zu der Lehre der Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. *)

---

angreifen möge, seinen Zweck zu erreichen, doch immer sichern Schrittes gehe, und nicht willkührlich um sich greife, ohne durch nothwendig anzustellende Ueberlegung dazu gebracht worden zu seyn. So z. B. sieht man augenblicklich ein, daß die Richtigkeit der Formel

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

viel leichter erkannt werden kann, als dies hier oben geschehen ist; weil aber der Schüler den Beweis so zu behandeln angefangen, wie die der übrigen Formeln, so hat es der Lehrer gerne gesehen, einmal, weil dadurch in dem Ganzen eine erfreuliche Einheit der Behandlung entsteht, und dann besonders, weil der Schüler bei diesen Beweisen gezwungen ist, eine Menge Verwandlungen vorzunehmen; und da diese Verwandlungen jedesmal nur mittelst vorher erwiesener Formeln statt finden können, so erwirbt sich der Schüler dadurch nach und nach eine bedeutende Gewandtheit in der Anwendung dieser Elementarformeln, worauf zuletzt allein die Sicherheit in den algebraischen Operationen beruht, die für jeden Algebraisten so sehr gewünscht werden muß.

*) Auf diese Lehren verwendet der Lehrer nur 3 Unterrichtsstunden, etwa eine für die Potenzen, eine für die Wurzeln und eine für die Logarithmen. Sie werden dann in einer der nächsten Klassen noch einmal eben so kurz vorgenommen, weil es hier zunächst darauf ankommt, dem Schüler die Gleichförmigkeit des Ganges nachzuweisen.

§. 35. Entwicklung des Begriffes der Potenz.

L. Nun wollen wir noch einige neue Zeichen kennen lernen. Dieses Zeichen a^b z. B. nenneu wir eine Potenz, a den Dignanden, b den Exponenten. Was werden wir jedoch durch dieses Zeichen a^b, welches a hoch b ausgesprochen wird, bezeichnen? — Was wir wollen. Um aber mit Andern in Uebereinstimmung zu seyn, wollen wir durch a^b das Produkt $a.a.a.a.....a$ von b Faktoren (d. h. von soviel Faktoren, als b Einheiten hat) bezeichnen. *)

§. 36. Erster Lehrsatz der Potenzen.

L. Könnt ihr nun wohl untersuchen, ob

$$a^m . a^n = a^{m+n}.$$

Sch. Ich frage mich, was ist der Ausdruck links? Ein Produkt. — L. Was sind die beiden Faktoren dieses Produkts? Sch. Potenzen. L. Was bezeichnet die Potenz a^m? Sch. Das Produkt $a.a.a....a$ von m Faktoren. L. Und die andere Potenz a^n? Sch. Das Produkt $a.a.a.a....a$ von n Faktoren. L. Also ist $a^m . a^n$? Sch. Gleich dem Produkt $a.a.a.a.a.a.....a$ von m und noch von n, also von $m+n$ Faktoren. L. Können wir nicht dieses Produkt kürzer bezeichnen? Sch. Ja, durch die Potenz a^{m+n}. L. Was haben wir also gefunden? Sch. Daß $a^m . a^n = a^{m+n}$ ist. L. Richtig.

§. 37. Zweiter Lehrsatz der Potenzen.

Nun nehmen wir aber die andere Formel

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Sch. Der Ausdruck links ist hier ein Quotient und bezeichnet daher die Zahl, die mit dem Divisor a^n multiplicirt, den Dividenden a^m gibt. Wenn also der Ausdruck rechts, nehmlich die

---

*) Da die genaue Kenntniß der Zeichen, ihrer Benennung und ihrer Bedeutung für den Schüler das wichtigste ist, so pflegt der Lehrer solche Erklärungen von den Schülern, so lange (unter immer neuen Formen) abzufragen, bis jeder einzelne fertige Antwort ertheilt.

Potenz a^{m-n}, auch mit a^n multiplicirt wird, und wenn dann ebenfalls a^m herauskommt, so bezeichnet sie nothwendig dieselbe Zahl und die Gleichung ist richtig. L. Gut. Wie aber weiter? Sch. Ich muß nun multipliciren a^{m-n} mit a^n, gibt $a^{m-n}.a^n$; und ich muß nun suchen, diesen Ausdruck in einen andern zu verwandeln, der noch dieselbe Zahl bezeichnet. L. Wie geschieht dies? Sch. Ich frage mich, was dieser Ausdruck ist, $a^{m-n}.a^n$; und finde, er ist ein Produkt, und die beiden Faktoren sind Potenzen; also sind 2 Potenzen mit einander multiplicirt. Um nun zu wissen, welchen Ausdruck man dafür setzen könne, suche ich unter unsern vorher erwiesenen Formeln diejenige auf, welche zwei Potenzen mit einander zu multipliciren lehrt. Dies ist aber die letzt erwiesene $a^m.a^n = a^{m+n}$, d. h. zwei Potenzen a^m und a^n, die einen gemeinschaftlichen Dignanden a haben, werden multiplicirt, wenn man ihre Exponenten m und n addirt, und ihren gemeinschaftlichen Dignanden a beibehält. Statt des Produkts $a^{m-n}.a^n$, erhält man also $a^{(m-n)+n}$ oder a^m; folglich ist die Gleichung richtig. L. Gut. —

§. 38. Dritter Lehrsatz der Potenzen.

L. Was werden wir aber statt $(ab)^m$ setzen können? Sch. Das Produkt $(ab).(ab).(ab)....(ab)$ von m Faktoren. L. Und dafür wieder? Sch. Weil hier jeder Faktor ab selber wieder ein Produkt ist, so kann man die Zahlen in beliebiger Ordnung multipliciren; also erst alle a mit einander, das gibt a^m; dann alle b mit einander, das gibt b^m, und dann diese beide Resultate wieder mit einander, und man erhält also

$$(ab)^m = a^m.b^m.$$

§. 39. Vierter Lehrsatz der Potenzen.

L. Ist aber auch die Formel $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ richtig. Sch. Ja, denn wenn man $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ mit dem Divisor b^m multipli-

cirt, so kommt der Dividend a^m heraus. Man erhält nehmlich zuerst $\left(\frac{a}{b}\right)^m . b^m$; dann nach der vorhergehenden Formel $\left(\frac{a}{b} . b\right)^m$, endlich a^m. L. Gut.

§. 40. Fünfter Lehrsatz der Potenzen.

Nehmen wir nun die Potenz $(a^m)^n$, deren Dignand a^m selbst wieder eine Potenz ist. Was kann man zunächst dafür setzen? Sch. Das Produkt $a^m . a^m . a^m \ldots . a^m$ von n Faktoren. L. Und dafür wieder? Sch. Ich habe hier Potenzen mit einander zu multipliciren, und kann dies entweder nach der Formel (C. α. 1.) oder nach der andern (C. α. 3.) bewerkstelligen. Nach (C. α. 1.) erhalte ich $a^{m+m+m+\ldots m}$, wo der Exponent eine Summe von n Summanden ist, so daß für ihn das Produkt mn gesetzt werden kann, wo dann die Potenz in a^{mn} übergeht. Nach der (C. α. 3.) dagegen erhält man statt

$$(a^m)^n \text{ oder } a^m . a^m . a^m \ldots . a^m$$

von n Faktoren, die Potenz $(a . a . a \ldots . a)^m$, wo der Dignand ein Produkt von n Faktoren ist, so daß für ihn a^n, also für das Ganze $(a^n)^m$ geschrieben werden kann.

L. Was finden wir also? Sch. Erstens daß $(a^m)^n = a^{mn}$ und zweitens, daß $(a^m)^n = (a^n)^m$ ist. L. Gut. Diese 6 Formeln der Potenzen wollen wir uns gut merken und sie in unsere Formelntabelle eintragen.

§. 41. Erklärung der Wurzel.

L. Das Zeichen $\sqrt[b]{a}$ nennen wir eine Wurzel, sprechen es aus: die bte Wurzel aus a, a heißt der Radikand, b der Wurzel-Exponent, und wir wollen immer damit die Zahl bezeichnen, die mit b potenzirt, a gibt. *)

---

*) Der Lehrer fragt diese Begriffe wieder oft genug ab, weil ihre genaue Kenntniß für den Schüler das einzige wissenswürdige ist.

§. 42. Grundformeln der Potenzen und Wurzeln.

L. Ist wohl die Gleichung $(\sqrt[m]{a})^m = a$ richtig? Sch. Der Ausdruck links ist eine Potenz; der Dignand derselben $\sqrt[m]{a}$ eine Wurzel, und bezeichnet daher die Zahl, die mit m potenzirt, a gibt. Da nun diese Zahl $\sqrt[m]{a}$ hier wirklich mit m potenzirt ist, so muß solches a geben. Es ist also $(\sqrt[m]{a})^m = a$. — L. Gut. Schreiben wir diese Gleichung wiederum als erste Grundformel der Radikation hin, und gehen zu der andern Formel

$$\sqrt[m]{(a^m)} = a.$$

Sch. Hier ist der Ausdruck links eine Wurzel und bezeichnet daher die Zahl, die mit m potenzirt a^m gibt, und daß diese Zahl a ist, fällt in die Augen.

§. 43. Erster Lehrsatz der Wurzeln.

L. Könnt ihr mir nun aber auch die Formel

$$\sqrt[m]{(ab)} = \sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b}$$ erweisen?

Sch. Der Ausdruck links ist eine Wurzel und bezeichnet die Zahl, die mit m potenzirt ab gibt. Ich potenzire daher auch den Ausdruck rechts mit m und sehe zu, ob ebenfalls ab herauskommt. L. Ist denn dann die Gleichung richtig? Sch. Ja, denn dann sind beide Ausdrücke Zahlen, die mit einer und derselben Zahl m potenzirt, ein und dasselbe Resultat geben; folglich müssen sie beide dieselben Zahlen seyn. *) L. Gut. Was mußt Du also jetzt thun? Sch. Ich muß den Ausdruck rechts $\sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b}$ mit m potenziren, das gibt $(\sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b})^m$. L. Wie weiter? Sch. Nun muß ich suchen, diese Potenz in einem an-

---

*) Der Lehrer macht hier den Schüler darauf aufmerksam, wie der Satz, daß wenn zwei Zahlen mit einer dritten potenzirt, einerlei Resultat geben, daß diese Zahlen dann dieselben seyn müssen, erst erwiesen werden müsse.

dern Ausdruck zu verwandeln, von welchem ich überzeugt bin, daß er noch dieselbe Zahl bezeichnet. Zu dem Ende untersuche ich den Ausdruck und finde, daß hier ein Produkt mit m potenzirt ist; sehe nun nach, welche Formel lehrt, wie ein Produkt mit einer Zahl m potenzirt wird, und da finde ich die Formel (C. α. 3.) links. Ein Produkt wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man jeden Faktor potenzirt, und die Potenzen mit einander multiplicirt. L. Gut. Also hier? Sch. Hier erhält man also statt $(\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b})^m$ zunächst $(\sqrt[m]{a})^m.(\sqrt[m]{b})^m$ oder ab, weil $(\sqrt[m]{a})^m = a$ und $(\sqrt[m]{b})^m = b$ seyn muß. Also ist die Gleichung $\sqrt[m]{(ab)} = \sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}$ richtig.

§. 44. Zweiter Lehrsatz der Wurzeln.

L. Wenn wir aber die andere Formel

$$\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

untersuchen wollten? Sch. So würden wir entweder den Ausdruck links mit m potenziren und zusehen, ob der Radikand $\frac{a}{b}$ herauskommt; oder wir würden den Ausdruck rechts mit $\sqrt[m]{b}$ multipliciren und zusehen, ob der Dividend $\sqrt[m]{a}$ sich ergibt. L. Richtig. — Der Lehrer läßt diesen Beweis vollends ausführen, und etwa den noch von der Formel $\sqrt[m]{(a^n)} = (\sqrt[m]{a})^n$, gibt einige der übrigen Formeln der Wurzeln auf, um sie zu Hause schriftlich zu erweisen, übergeht die übrigen gänzlich und geht sogleich zu der Lehre der Logarithmen über.

§. 45. Erklärung des Logarithmen.

L. Das Zeichen a?b oder $\overset{b}{log}\, a$ nenne ich einen Logarithmen, a den Logarithmanden, b die Basis; und ich

bezeichne damit jede Zahl, mit welcher die Basis b potenzirt, den Logarithmanden a gibt. *)

§. 46. Die beiden Grundformeln der Logarithmen.

L. Da gibt es wieder sogleich 2 Grundformeln

$$b^{(\overset{b}{log}\, a)} = a \quad \text{und} \quad \overset{b}{log}\,(b^a) = a.$$

Werdet ihr euch von ihrer Richtigkeit überzeugen können? Sch. Ja in der ersten dieser Formeln ist der Ausdruck links eine Potenz und der Exponent derselben ein Logarithme, der die Zahl bezeichnet, mit welcher b potenzirt, a gibt. Mit dieser Zahl $\overset{b}{log}\, a$ ist nun b wirklich potenzirt, also muß solches a geben. L. Und wie wird es mit der andern Formel werden? Sch. In dieser ist der Ausdruck links ein Logarithme und bezeichnet die Zahl, mit welcher b potenzirt b^a gibt, und daß diese Zahl keine andere als a ist, fällt in die Augen.

§. 47. Erster Lehrsatz der Logarithmen.

L. Wir wollen nun die Gleichung betrachten

$$\overset{p}{log}\,(ab) = \overset{p}{log}\, a + \overset{p}{log}\, b,$$

wie werdet Ihr Euch von der Richtigkeit derselben überzeugen können? Sch. Der Ausdruck links ist ein Logarithme und bezeichnet daher die Zahl, mit welcher p potenzirt, ab gibt. Potenziren wir daher dasselbe p auch mit der Summe $\overset{p}{log}\, a + \overset{p}{log}\, b$ auf der rechten Seite, und sehen wir zu, ob dann ebenfalls ab herauskommt. Man erhält dann $p^{(\overset{p}{log}\, a) + (\overset{p}{log}\, b)}$. Wie aber eine Zahl mit einer Summe potenzirt wird, lehrt die Formel (C. α. 1.) rechts. Eine Zahl wird mit einer Summe potenzirt

---

*) Der Lehrer fragt diese Begriffe oft genug ab, sucht die Schüler zwischen der Bezeichnung der Wurzel $\sqrt[b]{a}$ und des Logarithmen $\overset{b}{log}\, a$ irre zu machen, damit zuletzt der Unterschied zwischen der Wurzel und des Logarithmen recht klar und überzeugend hervorgehe.

wenn man die Zahl mit dem einen Summanden, dann dieselbe Zahl auch mit dem andern Summanden potenzirt, und die Potenzen mit einander multiplicirt. Also hier erhält man statt $p^{(\overset{p}{log}\, a)+(\overset{p}{log}\, b)}$, zunächst $p^{(\overset{p}{log}\, a)} \times p^{(\overset{p}{log}\, b)}$ oder a.b nach der ersten Grundformel (C. §. I.), folglich ist die Gleichung richtig. L. Warum? Sch. Weil beide Ausdrücke links und rechts des = Zeichens so sind, daß wenn man p mit ihnen potenzirt, dann dasselbe Resultat ab sich ergibt. *) L. Gut. Können wir uns eben so auch von der Richtigkeit der andern Form

$$\overset{p}{log}\left(\frac{a}{b}\right) = \overset{p}{log}\, a - \overset{p}{log}\, b$$

überzeugen? Sch. Ja. Entweder wir potenziren die Basis p mit der Differenz $\overset{p}{log}\, a - \overset{p}{log}\, b$ rechts und sehen, ob $\frac{a}{b}$ herauskommt; oder wir addiren den Subtrahenden $\overset{p}{log}\, b$ zu dem Logarithmen links $\overset{p}{log}\left(\frac{a}{b}\right)$ und sehen, ob der Minuend $\overset{p}{log}\, a$ herauskommt. L. Sehr gut. Der Lehrer läßt beides durchführen, und nachdem er auch noch die beiden Formeln

$$\overset{p}{log}\,(a^m) = m.\overset{p}{log}\, a$$

und

$$\overset{p}{log}\left(\sqrt[m]{a}\right) = \frac{\overset{p}{log}\, a}{m}$$

auf dieselbe Art hat erweisen lassen, läßt er die Beweise derselben 4 Formeln zu Hause schriftlich machen, und beschließt damit diese allgemeinen Elementar-Lehren, ohne sich auf die übrigen Formeln der Logarithmen einzulassen.

---

*) Der Lehrer bemerkt hier wieder, wie dieser Umstand noch besonders erwiesen werden muß, und in der Folge Einschränkungen erleiden dürfte.

§. 48. Schluß-Bemerkungen.

Der Lehrer gibt nun noch eine Uebersicht des bisher erlernten; fragt bald im allgemeinen ab, wie die Formeln der Subtraktion, der Division, der Radikation, und der Logarithmation erwiesen werden, bald läßt er auch einzelne Formeln nochmal erweisen, und fährt damit so lange fort, bis die Schüler (alle) eine ziemliche Fertigkeit in der Handhabung dieser allgemeinen Elementar-Formeln besonders bis zum Potenziren inclusive, (auf denen der gesammte Calcul beruht) erlangt haben. — Dann macht er sie auf den Umstand aufmerksam, daß alle diese Formeln nur unter der Voraussetzung gelten, daß jedes Zahlzeichen wirklich eine Zahl der Zahlenreihe bezeichne, d. h. eine absolute (abstrakte) ganze Zahl; daß sie also im Allgemeinen nicht gelten können. — Dann erzählt er ihnen, daß im Lehr-Buche der Arithm. Alg. und Analys. bewiesen sey, wie die Formeln der 4 ersten Operationen, der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division für alle Werthe der Buchstaben, also allgemein noch gelten, d. h. daß in diesen Gleichungen die Ausdrücke, sobald sie wirklich Zahlen bezeichnen, auch jedesmal links und rechts eine und dieselbe Zahl bezeichnen müssen; wie sie aber jetzt diese Beweise noch nicht verstehen könnten, und daß man daher den Satz einstweilen annehmen und vorbehalten wollte, ihn später in der obersten Klasse nachträglich zu erweisen. *)

Es kann auch zuweilen nützlich seyn, den Schüler nachdem er die bisherigen Formeln entwickelt hat, zu fragen, ob diese Formeln nur für eine bestimmte Zahl gelten oder ob man sich beliebige Zahlen unter den einzelnen Buchstaben gedacht habe. Er wird das letztere bejahen, weil ihm der Umstand, daß in der Differenz $a-b$, $a>b$ seyn muß, und daß im Quotienten $\frac{a}{b}$, a ein Vielfaches von b seyn muß, wenn $a-b$ oder $\frac{a}{b}$

---

*) Die Schüler, von denen hier die Rede ist, sind nehmlich 10 — 12-jährig.

eine Bedeutung haben sollen, ihm noch entfernt genug ligt, um ihn nicht zu bemerken. Man benützt diese Antwort, um den Schüler nun darauf aufmerksam zu machen, daß diese Formeln also nicht eigentlich lehrten, was von einzelnen Zahlen gilt, sondern mehr, wie die Operationen sich einander aufheben und für einander gesetzt werden müssen; versteht sich durch einzelne, Beispielsweise herausgenommene Formeln selbst, damit es anschaulich werde. Man schreibt z. B. hin

$$(a+b)-c=(a-c)+b,$$

so lehrt diese Formel, daß, wenn man hinter einander addiren und subtrahiren solle, es für das Resultat einerlei sey, ob man zuerst addire und dann subtrahire oder zuerst subtrahire und dann addire.

Es gilt dies also vom Addiren und Subtrahiren selber, nicht aber von dem was addirt oder subtrahirt wird. — Eben so greift der Lehrer eine andere Formel heraus z. B.

$$m.\frac{a}{b}=\frac{m.a}{b},$$

welche Formel lehrt, daß wenn man (eine Zahl a) hinter einander multipliciren und dividiren wolle, es wiederum einerlei sey für das Resultat, ob man zuerst multiplicire und dann dividire, oder zuerst dividire und dann multiplicire.

Eben so betrachtet man etwa noch die Formel

$$\frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$$

Dann erlaubt sich der Lehrer zum erstenmale, Ziffern zu gebrauchen, jedoch mit der ausdrücklichen Erinnerung, daß er dies nur der Erläuterung wegen thue und eigentlich nicht thun dürfe, auch zu thun nicht nöthig habe. Er zeigt nun wie die Formel

$$(2+5)-3=(2-3)+5$$

noch immer dasselbe Verhalten der Operationen des Addirens und Subtrahirens ausdrücke, wie die allgemeine

$$(a+b)-c=(a-c)+b,$$

obgleich die Differenz 2 — 3 dasmal eine bloße angezeigte

Subtraktion sey und keine (absolute, ganze) Zahl mehr bedeute. Der Lehrer geht weiter und sucht nun dem Schüler anschaulich zu machen, daß, obgleich [2 — 3] keine Zahl bedeute, dieses [2 — 3] doch eine Differenz sey, und daß man mit allen Differenzen a — b also auch mit dieser Differenz 2 — 3, nach denselben Formeln der Tabelle rechnen könne, und nie etwas unrichtiges erhalten werde, daß also solche Differenzen wie z. B. 2 — 3, 5 — 9, etc. etc. bequeme Rechnungs-Mittel seyen, die man weder vermeiden könne noch wolle, sondern mit denen wir in der Folge immer nach denselben Sätzen der Differenzen rechnen wollten, wie solche eben jetzt in die Tabelle verzeichnet worden seyen.

Erster Unterricht in der Zahlenlehre.

Zweites Kapitel.

Anwendung des allgemeinen Verhaltens der Operationen auf specielle Fälle.

§. 49. Erklärung der 0 (Null).

Lehrer. Weil wir nun wissen, wie man eine Differenz $a-b$, addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt, man mag auch für a und für b setzen, was man will, so wollen wir einmal diese Differenz $p-p$ oder $q-q$ oder $a-a$ nehmen, die später oft vorkommt, wollen sie addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren, um die Resultate nachher ebenfalls in unsere Tabelle schreiben zu können. Noch später arbeiten wir dann praktisch bloß mit Hilfe der Tabelle.

Da aber alle diese Differenzen einander gleich sind, da nehmlich $p-p=q-q=a-a$ ist, *) so machen wir uns die Untersuchung dieser Differenzen bequemer und stellen sie alle

*) Es wird meist am besten seyn, daß

$$p-p=q-q$$

ist, den Schüler vorher besonders beweisen zu lassen. Er wird nehmlich q auf beiden Seiten addiren und links zuerst $(p-p)+q$, dann nach (A. β. 1.) $(p+q)-p$ und endlich nach der Grundformel (A. β. II.) q erhalten; rechts aber $(q-q)+q$ d. h. q, also dasselbe. Und daran wird die Gleichheit der Ausdrücke erkannt.

durch ein kürzeres Zeichen dar. Wir wollen dazu dieses Zeichen 0 gebrauchen und solches Null aussprechen. Was ist also 0 (Null)? Sch. Null ist nichts. L. Wie unachtsam. Noch einmal, was ist Null? Sch. Null ist ein Stellvertretendes Zeichen und bedeutet soviel wie nichts. L. Du hast wohl ganz vergessen, daß wir von dem, was ihr im gemeinen Rechnen getrieben habt, hier gar nichts voraussetzen dürfen, ja daß wir gerade erst darauf hinarbeiten, das gemeine Rechnen selber zu erfinden. Nur das ist von uns verstanden, also für uns da gewesen und als wahr erkannt, was wir bis jetzt in diesem Unterrichte gehabt haben. Haben wir aber hier früher schon dieses Zeichen 0 (Null) gehabt? Habe ich euch früher schon gesagt, was wir damit bezeichnen wollen? Habe ich euch gesagt, daß wir nichts damit bezeichnen wollen? Sch. Nein. L. Nun gut. Wie habe ich aber eben heute die Bedeutung, in welcher wir künftig dieses 0 (Null) gebrauchen wollen, festgesetzt? Sch. Wir wollen damit die Differenz $p-p$ bezeichen. L. Oder irgend eine andere $q-q$, $a-a$, in welcher Minuend und Subtrahend nicht mehr von einander verschieden, und welche dann alle einander gleich sind. L. Ist also 0 (Null) ein Stellvertretendes Zeichen? Sch. Nein. L. Abermals unachtsam. Vertritt dieses Zeichen 0 (Null) nicht die Stelle einer Differenz? Sch. Ja — aber so ist ja jedes Zeichen ein Stellvertretendes, weil es immer für etwas anderes steht. L. Da hast du auch recht. Inzwischen kannst du noch einen Unterschied machen, ob ein Zeichen unmittelbar eine Zahl, oder selber wieder ein anderes Zeichen vertritt. Doch thut das nichts zur Hauptsache, wenn ihr nur von nun an ein für allemal fest haltet, was uns 0 (Null) bedeutet. Bedeutet 0 (Null) nichts? Sch. Nein. Es bedeutet eine Differenz $p-p$, oder $q-q$, oder eine ähnliche. L. Was verstehst du unter einer ähnlichen? Sch. In welcher der Minuend von dem Subtrahenden nicht verschieden ist, z. B. $z-z$. L. Gut. Aber eine solche Differenz, z. B. $z-z$ ist ja wohl nichts? Sch. —. L. Eine angezeigte Subtraktion

ist das etwas oder nichts? Sch. Etwas. L. Gut. Und da wir bloß kennen lernen wollen, wie Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren sich zu einander verhalten, d. h. wie sie sich einander aufheben, und dergl., so ist uns die angezeigte Subtraktion a — b nicht mehr und nicht weniger, als die angezeigte Subtraktion a — a, und diese, (wenn ihr mir Ziffern erlauben wollt) nicht mehr und nicht weniger als die angezeigte Subtraktion 3 — 7, und diese Differenz 3 — 7 wiederum so lieb, als wie diese andere 7 — 3, die da wirklich eine Zahl vorstellt. Das Zeichen 0 (Null) ist daher nicht nur etwas (d. h. wirklich vorhanden), sondern es bedeutet auch etwas, und zwar eine Differenz oder eine angezeigte Subtraktion besonderer (nehmlich gleicher) Ausdrücke. Was werdet Ihr also, wenn ich 0 (Null) hinschreibe, dafür setzen können? Sch. Die Differenz p — p oder z — z. L. Gut. Merkt euch das wohl, und ihr werdet in der Folge sehen, daß dieses 0 (Null) auch später, wenn wir bis zum gemeinen Rechnen werden vorgerückt seyn, nehmlich im gemeinen Rechnen selbst, nie eine andere als diese Bedeutung hat.

§. 50. Erster Lehrsatz der Null.

L. Wenn ich nun verlange, ihr sollt 0 (Null) zu a addiren, was gibt es? Sch. Das gibt selber wieder a. L. Das weißt du schneller als ich, denn ich müßte das erst untersuchen. Warum gibt es denn a, wenn 0 zu a addirt wird? Sch. Ja, wenn ich nichts addire so ändert sich auch nichts. L. Wiederum zwei Fehler auf einmal. Verstehen wir denn unter 0 (Null) nichts? Und was verstehen wir, wenn wir sagen b soll zu a addirt werden? Sch. Man soll die Summe a + b hinschreiben. L. Was gibt es also, wenn 0 zu a addirt wird? Sch. a + 0. L. Richtig; allein wir haben bisher ähnliche Fragen meistens zugleich in dem praktischen Sinne genommen, daß wir nicht bloß die Summe haben wollten, welche durch das ursprüngliche Addiren entsteht, sondern zugleich mehre andere Ausdrücke

und darunter namentlich den einfachsten, der dieser Summe wiederum gleich ist. Wenn ich also auch dasmal nicht bloß die Summe $a+0$ haben will, sondern noch Ausdrücke, welche ihr gleich sind, wie werde ich das anfangen? Sch. Ich werde mich fragen, was bedeutet 0 (Null) und sogleich $p-p$ statt 0 setzen können. L. Gut; dies gibt also? Sch.

$$a+0=a+(p-p).$$

L. Wie wirst du nun aber dafür wiederum einen andern Ausdruck finden können? Sch. In dem Ausdruck $a+(p-p)$ ist eine Zahl a zu einer Differenz $p-p$ addirt; dies geschieht nach der Formel (A. β. 1.) und gibt $(a+p)-p$. L. Gut. Und dafür? Sch. kann man wieder a setzen, nach der 2ten Grundformel (A. β. II.). L. Gut. Also hast du gefunden? Sch. $a+0=a$. L. Schreibt euch dieses Resultat in eure Tabelle, damit wir in der Folge es nicht immer wieder auf's neue so, wie wir eben gethan haben, finden müssen, sondern die jetzt erwiesene, folglich als wahr erkannte Formel bloß anwenden dürfen.

§. 51. Zweiter Lehrsatz der Null.

L. Was werdet ihr erhalten, wenn ihr 0 von a subtrahiren sollt? Sch. $0-a$. L. Falsch, b von a subtrahiren, heißt nicht die Differenz $b-a$, sondern die Differenz $a-b$ hinschreiben. Was gibt also 0 von a subtrahirt? Sch. $a-0$. L. Und diesem ist gleich? Sch. $a-(p-p)$. L. Es ist also die Differenz $p-p$ von a zu subtrahiren, was gibt dies? Sch. Nach (A. β. 3.) $(a-p)+p$; und dieses ist wieder $=a$, nach der 1ten Grundformel (A. β. I.). Also ist

$$a-0=a.$$

L. Gut. Auch dieses schreibt ein.

§. 52. Dritter Lehrsatz der Null.

L. Nun multiplicirt einmal a mit 0. Sch. Gibt

$$a.0=a.(p-p)=ap-ap=0.$$

L. Also findet ihr? Sch. $a.0=0=0.a$.

§. 53. Vierter Lehrsatz der Null.

L. Wenn ihr nun 0 durch a dividiren sollt? Sch. so erhalten wir $\frac{0}{a}$ oder $\frac{p-p}{a}$ oder nach (B. β. 2.) $\frac{p}{a}-\frac{p}{a}$. L. Gut; aber dies letztere ist wieder? Sch. $=0$. L. Warum? Sch. Weil wir unter 0 (Null) nichts weiter uns denken, als die Differenz $z-z$, und jede ihr gleiche, d. h. jede andere, in welcher der Minuend von ihrem Subtrahenden nicht verschieden ist, also auch $\frac{p}{a}-\frac{p}{a}$. L. Sehr gut. *)

Wenn ihr nun aber a durch 0 dividiren solltet, was würdet ihr da erhalten? Sch. $\frac{a}{0}$ oder $\frac{a}{p-p}$. L. Und was würdet ihr dafür wiederum setzen können? Sch. Es ist hier eine Zahl a durch eine Differenz dividirt. Ich muß daher in meiner Formeltabelle nachsehen, in welcher Formel dasselbe geschehen ist. L. Nun? Sch. sucht vergebens, denn es ist noch keine solche da gewesen. Der Lehrer vertröstet ihn auf die Folge, und insbesondere auf den Lehrsatz (B. β. 18.)

$$\frac{A}{B}=x+\frac{A-B.x}{B},$$

den jedoch der Schüler jetzt gleich beweisen muß, indem er, wie immer in solchem Falle, mit B auf beiden Seiten multiplicirt, und nachweist, daß auf beiden Seiten ein und dasselbe Resultat sich ergibt.

§. 54. Erklärung des additiven und subtraktiven Ausdrucks.

L. Wir wollen noch mehr Anwendungen unserer Formel-

---

*) Wenn es darauf ankäme, so könnte man hier sogleich a mit 0 potenziren lassen, erhielte a^0, dann a^{p-p}, dann $\frac{a^p}{a^p}$ und dann wohl auch 1. — Es ist aber besser, dieses Potenziren noch etwas weiter hin zu verschieben und dann die Lehre der Potenzen, für den Fall, daß der Exponent keine (absolute, ganze) Zahl mehr ist, sogleich gründlicher zu behandeln.

tabelle machen. Betrachten wir nehmlich die Summe $0+b$ und die Differenz $0-b$, und einen beliebigen Ausdruck a. Addiren, subtrahiren, multipliciren, dividiren wir solche zu, von, mit und durch einander. Allein vorher wollen wir noch, der Kürze wegen, die Summe $0+b$ bloß durch $+b$ und die Differenz $0-b$ bloß durch $-b$ bezeichnen; und um uns einander desto bequemer alles mittheilen und verständlich machen zu können, wollen wir $+b$ einen additiven und $-b$ einen subtraktiven Ausdruck (oder additive und subtraktive Zahl) nennen. Wenn ich also von jetzt ab von einem additiven Ausdruck oder von einer additiven Zahl $+q$ sprechen werde, was verstehe ich darunter? Sch. Die Summe $0+q$. L. Und wenn von dem subtraktiven Ausdruck $-d$ die Rede ist, was denkst du dir dabei? Sch. Eine entgegengesetzte Größe. L. Wo hast du wieder deine Gedanken? Haben wir hier bis jetzt von Größen überhaupt gesprochen? Oder ist gar von entgegengesetzten Größen hier schon die Rede gewesen? Treiben wir nicht Zahlenlehre? Ist nicht unser nächster Zweck, das Verhalten der Zahlen-Operationen kennen zu lernen, was für alle Zahlen dasselbe bleibt, damit wir nachher das gemeine Rechnen, und vielleicht später auch einmal die Behandlung der Größen daraus ableiten, und alles selber erfinden können? — Noch einmal also, was verstehen wir unter $-d$? Sch. Die Differenz $0-d$. L. Gut; und diese Differenz $0-d$ ist wieder eine Subtraktion, und diese Subtraktion steht wieder mit der Addition und mit den übrigen Operationen in dem Verhältniß, wie wir solches in den Formeln der Tabelle aufgefunden haben, so daß mit solchen Differenzen, wie $-d$ d. h. $0-d$, nach denselben Formeln wiederum gearbeitet (gerechnet) werden kann.

Noch könnt ihr euch merken, daß man in $+b$ oder $-b$, das bloße b das Glied der additiven oder subtraktiven Zahl nennt.

L. Also noch einmal; was ist $+b$? Sch. Eine Zahl. L. Falsch. Sch. Ein Zeichen. L. Gut. Wie heißt dieses

Zeichen? Sch. Eine additive Zahl. L. Was bezeichnen wir damit? Sch. Die Summe $0+b$. L. Also ist $+b$ bloß ein kürzeres Zeichen statt der Summe $0+b$. L. Und was ist $-b$? Sch. Ein Zeichen. L. Was wird durch selbiges bezeichnet? Sch. Die Differenz $0-b$. L. Was verstehen wir unter dem Worte, subtraktive Zahl. Sch. Keine Zahl, sondern eben ein solches Zeichen (einen solchen Ausdruck) von der Form $-b$, welches bloß ein kürzeres Zeichen ist, für die Differenz $0-b$. L. Gut. Nun will ich sehen, ob ihr das gut gemerkt habt; denn nun sollt ihr mit solchen additiven und subtraktiven Zahlen $+b$ und $-b$ addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren, und da will ich sehen, ob ihr das auch könnt? Sch. O ja. Denn wir setzen statt $+b$ und $-b$, die Summe $0+b$ und die Differenz $0-b$, und wie man Summen und Differenzen addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt, das lehren uns ja unsre Formeln der Tabelle.

§. 55. Lehrsätze für die additiven Zahlen.

L. Nun, ich werde sehen, wie das gehen wird. Erstlich sagt mir, ob ihr statt $+b$ nicht noch einen einfachern Ausdruck finden könnt, der dem $+b$ gleich seyn muß? Sch. $+b$ bedeutet die Summe $0+b$, und daß $0+b=b$ ist, haben wir (n. 1.) der besondern Formeln ersehen; also ist

$$+b=b.$$

L. Gut. Statt $+b$ könnt ihr also jedesmal bloß b setzen und umgekehrt. Habt ihr also $+b$ zu addiren, zu subtrahiren, zu multipliciren, zu dividiren, so addirt, subtrahirt, multiplicirt oder dividirt ihr bloß b, welches dann keine Schwierigkeit hat. Ihr erhaltet dadurch

$$a+(+b)=a+b$$
$$a-(+b)=a-b$$
$$a\,.\,(+b)=ab$$
$$a:(+b)=a:b.$$

§. 56. Lehrsätze für die subtraktiven Zahlen.

Aber nun wollen wir $-b$ nehmen und solches zu a addiren, was gibt das? Sch. $a+(-b)$. L. Richtig. Was könnt ihr aber dafür setzen? Sch. $a+(0-b)$; und weil hier a zu der Differenz $0-b$ addirt ist, so gibt dies nach Formel (A. β. 1.) $(a+0)-b$ oder nach der speciellen Formel (n. 1.) $a-b$. L. Was haben wir also gefunden? Sch. Daß $a+(-b)=a-b$ ist. L. Richtig. Könnt ihr mir nicht noch mehr Ausdrücke angeben, welche dem $a+(-b)$ gleich seyn müssen. Sch. O ja; wir dürfen nur die Differenz $0-b$ zu a nach der andern Formel (A. β. 3.) addiren; dann erhalten wir $0-(b-a)$. L. Gut. Aber dafür? Sch. $-(b-a)$. L. Warum? Sch. Weil wir unter $-(b-a)$ uns nichts weiter denken als die Differenz $0-(b-a)$. L. Richtig. Wir finden also

$$a+(-b)=a-b=-(b-a).$$

Was erhalten wir aber, wenn wir $-b$ von a subtrahiren sollen? Sch. Zuerst $a-(-b)$. L. Dann? Sch. $a-(0-b)$ und nach Formel (A. β. 3.) welche lehrt, wie eine Differenz $0-b$ von einer Zahl a subtrahirt wird, $(a-0)+b$, und dafür wieder nach der speciellen Formel (n. 2.) $a+b$. Also finden wir

$$a-(-b)=a+b.$$

L. Sehr brav. Da werdet ihr mir auch nun a mit $-b$ multipliciren können? Sch. Man erhält erstlich $a.(-b)$; dann $a.(0-b)$; dann nach Formel (B. α. 2.) $a.0-a.b$, dann

---

*) Man könnte auch sogleich a mit $-b$ potenziren lassen unter der Voraussetzung, daß die Formeln der Potenzen noch allgemein gelten; sie würden erhalten, zuerst a^{-b}, dann a^{0-b}, ferner nach Formel (C. α. 2.) $\frac{a^0}{a^b}$, und weil $a^0=1$ ist, zuletzt auch $\frac{1}{a^b}$, so daß man hätte

$$a^{-b}=\frac{1}{a^b}.$$

Doch ist es besser, die Potenzen sogleich gründlicher zu behandeln.

nach der speciellen Formel (n. 12.) weil $a.0=0$ ist, $0-ab$; endlich $-ab$, weil $-ab$ nichts weiter bezeichnen soll, als die Differenz $0-ab$. L. Also finden wir

$$a.(-b)=-ab.$$

Wie werdet ihr aber $-b$ durch a dividiren? Sch. Dies gibt zuerst $\frac{-b}{a}$, dann $\frac{0-b}{a}$, dann nach Formel (B. β. 2.) $\frac{0}{a}-\frac{b}{a}$, ferner nach der speciellen Formel (n. 13.) $0-\frac{b}{a}$, endlich $-\frac{b}{a}$; so daß sich also findet $\frac{-b}{a}=-\frac{b}{a}$. L. Sehr gut. Aber dividirt mir einmal a durch $-b$? Sch. Gibt $\frac{a}{-b}$, dann $\frac{a}{0-b}$. L. Aber was nun weiter? Sch. Wir müssen nun die Formel aufsuchen, welche lehrt, wie eine Zahl a durch eine Differenz $0-b$ dividirt wird. L. Nun wo stehet diese? Sch. — Es ist keine solche da. L. Zur Zeit noch nicht. Wie wirst du es also anders machen? Sch. Das weis ich nicht. L. Du mußt hier so ohngefähr versuchen, welcher Ausdruck wohl mit $-b$ multiplicirt a geben könnte; und da wirst du bald finden, daß $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$ ist, wenn wir nur vorher noch eine specielle Formel, welche hier gebraucht wird, entwickelt haben werden.

§. 57. Fortsetzung der Lehrsätze der subtraktiven Zahlen.

L. Nehmen wir nun zwei subtraktive Zahlen $-a$ und $-b$, und addiren solche zu einander; was gibt das? Sch. $(-a)+(-b)$, dann $(0-a)+(0-b)$ und nach der Formel (A. β. 4.) $(0+0)-(a+b)$ oder $0-(a+b)$ oder $-(a+b)$. Also $(-a)+(-b)=-(a+b)$.

L. Gut. Subtrahiren wir aber $-b$ von $-a$? Sch. Dies gibt $(-a)-(-b)$ oder $(0-a)-(0-b)$; und

nun muß ich nachsehen, welche der Formeln lehrt, wie eine Differenz von einer andern subtrahirt wird. — Eine solche ist aber nicht vorhanden. L. Nein. Dergleichen wird dir oft vorkommen; denn es sind so wenig wie möglich Elementar-Formeln in die Tabelle aufgenommen worden. Wenn man nehmlich nur weiß, wie ein einfacher Ausdruck (ein bloßer Buchstabe) mit einem zusammengesetzten Ausdruck (Summe, Differenz, Produkt, Quotient, u. s. w.) durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, u. s. w. verbunden wird; so kann man die Verbindung zweier zusammengesetzten Ausdrücke dadurch bewerkstelligen, daß man einen davon anfänglich als einen bloß einfachen betrachtet und behandelt, was immer geschehen kann, weil jeder noch so zusammengesetzte Ausdruck doch immer nur ein (einziger) Ausdruck ist, (und ursprünglich auch nur eine einzige Zahl bezeichnet oder ausdrückt). — Betrachten wir z. B. hier, wo

$$(-a)-(-b) \quad \text{oder} \quad (0-a)-(0-b)$$

verwandelt werden soll, die Differenz $0-a$ als einen einfachen Ausdruck, von welchem die Differenz $0-b$ subtrahirt werden soll, so kann solches sogleich nach (A. β. 3.) geschehen und gibt? Sch. Man muß den Minuenden 0 zuerst subtrahiren von diesem Ausdruck $0-a$, dies gibt aber nach (Sp. F. n. 2.) wieder $0-a$; und dann muß der Subtrahend b noch addirt werden; also erhält man $(0-a)+b$. L. Und? Sch. Dieses ist wieder $=(0+b)-a=b-a$, auch $=0-(a-b)$ $=-(a-b)$. L. Also haben wir gefunden

$$(-a)-(-b)=b-a=-(a-b).$$

Sch. Das hätte ich doch noch kürzer erhalten können. L. Wie denn? Sch. Weil ich schon weiß, daß $-b$ von a subtrahirt, zunächst $a-(-b)$, aber dann auch $a+b$ gibt, so kommt, wenn man $-b$ von $-a$ subtrahirt, sogleich $(-a)+b$, und daß dieses wieder $=b-a$, auch $=-(a-b)$ ist, haben wir ebenfalls kurz vorher schon gehabt. L. Ganz richtig. Auch konntest du so verfahren. Es ist

$$(-a)-(-b)=(0-a)-(0-b).$$

Statt nun wie vorhin $0-a$, so nehmen wir jetzt $(0-b)$ als einen einfachen Ausdruck, welcher von der Differenz $0-a$ subtrahirt werden soll, und dadurch subtrahirt wird, daß man ihn bloß von dem Minuenden 0 subtrahirt und den Subtrahenden a unverändert läßt, so daß man erhält

$$[0-(0-b)]-a.$$

Weil nun $0-(0-b)=(0-0)+b=0+b=b$ ist, so geht dieser Ausdruck wieder über in $b-a$, wie wir solches auch immer schon erhalten haben. Also ist wiederum

$$(-a)-(-b)=b-a.$$

L. Wie werdet ihr aber $-a$ mit $-b$ multipliciren? Sch. Wir werden $(-a).(-b)$ hinschreiben. L. Gut. Aber was werdet ihr nun weiter dafür setzen können, so nehmlich, daß die neuen Ausdrücke diesem Produkt $(-a).(-b)$ nothwendig gleich sind? Sch. Wir werden zunächst $(0-a).(0-b)$ dafür setzen können, weil $-a$ nichts weiter bedeuten soll, als die Differenz $0-a$. L. Gut. Sch. Und weil wir keine Formel finden in unserer Tabelle, welche lehrte, wie zwei Differenzen mit einander multiplicirt werden, so werde ich wieder die eine dieser Differenzen etwa $0-b$ als einen einfachen Ausdruck ansehen, und dann nach der Formel (B. α. 2.) erhalten

$$0.(0-b)-a.(0-b).$$

L. Was kannst du aber für $0(0-b)$ schreiben. Sch. $0.0-0.b$. L. Dies ist zwar richtig, aber da wir wissen, daß $0.z=0$ ist, so ist auch $0.(0-b)=0$, und es ist also wenigstens kürzer, sogleich 0 zu setzen. Sch. Dann erhalte ich für meinen Ausdruck, weil auch $a.(0-b)=a.0-ab=0-ab$ ist, jetzt $0-(0-ab)$. L. Ganz richtig. Und was hast du nun? Sch. Jetzt habe ich die Differenz $0-ab$ von einem einfachen Ausdruck 0 zu subtrahiren. Dies geschieht nach (A. β. 3.) und gibt $(0-0)+ab$ oder, weil $0-0=0$ ist, auch $0+ab$ oder auch bloß $+ab$. L. Was hast du also gefunden? Sch. Daß $(-a).(-b)=+ab$ ist. L. Konntest du das nicht noch kürzer haben? Sch. O ja; wenn ich sogleich die kurz vor-

hergehenden Formeln angewandt hätte. Weil nehmlich $a.(-b) = -ab$ ist, so ist auch $(-a).(-b) = -(-a).b$ und dieses wiederum $= -(-ab) = +ab$. L. Ihr sehet hieraus, wie es auch nur nöthig ist, eine einzige subtraktive Zahl, mit einem einfachen Ausdrucke addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren zu können, weil, wenn ihr dann zwei subtraktive Zahlen zu addiren, zu subtrahiren, zu multipliciren und zu dividiren habt, ihr zuerst die eine davon nur als einen einfachen Ausdruck ansehet und behandelt, was allemal geschehen kann, weil jeder noch so zusammengesetzte Ausdruck, also auch die subtraktive Zahl, doch immer nur ein Ausdruck ist. Versuchts nun einmal und dividirt auch $-a$ durch $-b$. Sch. Dann erhalten wir zunächst $\frac{-a}{-b}$. L. Was erhaltet ihr aber weiter dafür? Sch. Ja, wenn ich $-b$ als den einfachen Ausdruck ansehe, so erhalte ich nach (Sp. F. n. 16.) $-\frac{a}{-b}$ dafür. L. Gut. Und dafür? Sch. Weil $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ ist, so erhalte ich dafür wieder $-\left(-\frac{a}{b}\right)$ also $+\frac{a}{b}$? L. Richtig. Es ist also $\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$. Sch. Und hätte ich anfänglich $-a$ als den einfachen Ausdruck angesehen, so hätte ich nach (Sp. F. n. 17.) statt $\frac{-a}{-b}$ zunächst erhalten $-\frac{-a}{b}$, und dafür dann wieder, weil $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ ist, $-\left(-\frac{a}{b}\right)$, also auch $+\frac{a}{b}$. L. Sehr brav. Schreibt euch diese Resultate in die Tabelle und noch die Formel

$$\frac{A}{B} = x + \frac{A - Bx}{B},$$

welche wir früher schon einmal bewiesen haben, dazu, und unsre

Formel-Tabelle ist beendiget. Nun geht's an das praktische Arbeiten.

§. 58. Uebersicht des bisher Erlernten.

Sagt mir nur noch einmal, was haben wir bisher in diesen Stunden erlernt? Sch. gibt eine ungenügende Antwort. L. Haben wir etwas erlernt, was nur für eine bestimmte Zahl gilt, oder was für alle Zahlen gilt? Sch. Was für alle Zahlen gilt. L. Was ist denn das nun, was für alle Zahlen gilt, und was wir bis jetzt erlernt haben? Sch. Was von den Operationen (Zahlenverbindungen) gilt. L. Richtig. Wir haben jetzt erlernt, wie sich diese Operationen zu einander verhalten, und zwar in den einfachsten Fällen. Weil aber die zusammengesetztern Fälle, aus den einfachern zusammengesetzt seyn müssen, so werden wir mit dem, was wir hier erlernt haben, ausreichen, um die zusammengesetztesten Fälle damit behandeln zu können. Das sollt ihr eben jetzt nach und nach erfahren. — Legt nur euere Tabelle zur Hand, weil sie die Regeln alle enthält, nach denen die Operationen (Zahlen-Verbindungen) sich richten, und nur allein sie euch vor unrichtigem Arbeiten schützen kann. Ich will euch das einmal recht deutlich sehen lassen. Wenn ich hinschreibe $\frac{am}{bm}$, was werdet ihr dafür setzen können? Sch. $\frac{a}{b}$. L. Und wenn ich hinschreibe $\frac{a:m}{b:m}$, was setzt ihr dafür? Sch. Auch $\frac{a}{b}$. L. Also, wenn ich hinschreibe $\frac{a+m}{b+m}$? Sch. So ist das auch $=\frac{a}{b}$. L. Warum aber? Sch. Ja, das m oben und unten hebt sich weg. L. Siehst du, wie unachtsam du bist. Was heißt denn das, wegheben? Sch. Daß man das m oben und unten weglassen kann. L. Woher weist du denn aber, daß man bei $\frac{a+m}{b+m}$, das m oben und unten

weglassen kann, und daß der dann entstehende Ausdruck $\frac{a}{b}$, dem gegebenen $\frac{a+m}{b+m}$ gleich seyn muß? Sch. weis es nicht. L. Untersuche einmal, ob

$$\frac{a+m}{b+m}=\frac{a}{b}$$

eine richtige Gleichung ist? Wie wirst du das anfangen? Sch. Ich werde mich fragen, was ist der Ausdruck links, nehmlich $\frac{a+m}{b+m}$? — ein Quotient. L. Und was bedeutet er? — dasjenige, was mit $b+m$ multiplicirt $a+m$ gibt. L. Wenn du also wissen willst, ob der Ausdruck rechts, nehmlich $\frac{a}{b}$ diesem gleich ist, woran wirst du das erkennen? Sch. Ich werde $\frac{a}{b}$ ebenfalls mit $b+m$ multipliciren und werde nachsehen, ob ebenfalls $a+m$ herauskommt. L. Nun wenn du multiplicirst? Sch. so kommt zunächst $(b+m).\frac{a}{b}$, dann nach (B. β. 3.) $\frac{a(b+m)}{b}$, dann nach (B. α. 1.) $\frac{ab+am}{b}$, dann nach (B. β. 1.) $\frac{ab}{b}+\frac{am}{b}$, endlich nach (B. β. II.) $a+\frac{am}{b}$. L. Ist das so viel, als $a+m$? Sch. Ich glaube nicht, denn sonst müßte

$$m=\frac{am}{b} \text{ d. h. } bm=am,$$

also auch $b=a$ seyn. L. Ist denn nicht $b=a$? Sch. Nein; denn es sind b und a ganz willkührliche Ausdrücke. L. Kann denn nicht $b=a$ seyn? Sch. O ja. L. Also in dem einzigen Fall, daß gerade $b=a$ seyn sollte, da hättest du recht gehabt,

$$\frac{a+m}{b+m}=\frac{a}{b}$$

zu setzen, in jedem andern Falle, also fast allemal, hättest du unrecht. — Merkt euch das wohl. Nie muß man etwas vornehmen, wovon man nicht den Grund jeden Augenblick mit der größten Bestimmtheit und Sicherheit angeben kann. Daher dürft ihr künftighin gegebene Ausdrücke nur nach den Formeln der Tabelle verwandeln, warum? Sch. Weil nur in diesen Formeln die Gesetze ausgesprochen sind, nach denen sich die Zahlen-Verbindungen (Operationen) richten.

Erster Unterricht in der Zahlenlehre.

Drittes Kapitel.

Anwendungen des bisherigen auf zusammengesetztere Fälle. Lehre der algebraischen Summen.

§. 59. Allgemeine Bemerkungen.

In höchstens 30 Unterrichtsstunden, also binnen 10 Wochen vom Anfange an gerechnet, haben die Schüler in der Regel in dem vorhergehenden sich bereits Sicherheit und Fertigkeit verschafft. Alles kommt nun darauf an 1) die Fertigkeit in der Anwendung der Formeltabelle auf den höchsten Punkt zu treiben; 2) dazwischen sich von Zeit zu Zeit, und zwar anfänglich oft auf die allerersten Begriffe und Gründe zurückführen zu lassen, damit der Geist und das Selbstbewustseyn immer vorwalte und das Arbeiten (was außerdem leicht geschieht) nie in ein mechanisches und geistloses ausarte; 3) die Uebungen vorzüglich auf solche Gegenstände zu leiten, die selbst wieder nachher als praktische Mittel zum neuen Fortschreiten im materiellen der Wissenschaft benützt werden können. Der Lehrer wird also nun ohngefähr so fortfahren:

§. 60. Praktische Regeln für das Operiren mit additiven und subtraktiven Ausdrücken.

Nun Kinder sollt ihr Gelegenheit bekommen, eure Formeln anzuwenden. Zu dem Ende ist es gut, daß ihr sie, und was

sie lehren, so viel wie möglich im Gedächtniß habt. Deshalb wollen wir einmal die der additiven und der subtraktiven Zahlen zusammenstellen; da finden wir sogleich folgende praktische Regeln:

I. Jedem Ausdruck kann man ein + Zeichen vorgeschrieben denken, weil $+b=b$ ist.

II. Alle Ausdrücke sind daher entweder als additive oder als subtraktive Zahlen anzusehen, und da bemerke man für sie folgende Regeln:

1) Sie werden addirt

α) wenn sie einerlei (+) oder (—) Zeichen vor sich stehen haben, dadurch daß man die Glieder addirt, und der Summe dasselbe Zeichen vorschreibt;

β) wenn sie verschiedene (+ oder —) Zeichen vor sich stehen haben, indem man das Glied irgend einer, von dem Gliede der andern subtrahirt, und der Differenz das (+ oder —) Zeichen des Minuenden (des Gliedes, von welchem subtrahirt wurde) vorsetzt.

2) Die eine wird von der andern subtrahirt, wenn man die zu subtrahirende mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen versieht (d. h. mit dem andern dieser beiden Zeichen, wenn sie das eine davon hat) und dann zu der andern nach (1.) addirt.

3) Zwei solche additive und subtraktive Ausdrücke werden mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt, wenn man ihre Glieder multiplicirt oder dividirt, und hinsichtlich der vorzusetzenden (+ oder —) Zeichen die Regel beobachtet: „Gleiche „Zeichen geben (+); ungleiche aber (—)."

L. Nun sage mir, sind denn diese Regeln richtig? Sch. Das weis ich nicht. L. Wenn du zwei additive und subtraktive Ausdrücke addiren, subtrahiren, multipliciren oder dividiren sollst, zu, von, mit oder durch einander, wie viel Fälle sind möglich? Sch. Entweder ich habe zwei additive Zahlen $+a$ und $+b$, oder eine additive und eine subtraktive Zahl $+a$ und $-b$, oder zwei subtraktive Zahlen $-a$ und $-b$. L. Gut. Wenn

du nun in diesen 3 Fällen addirst, dabei aber genau die Regel (nro. 1.) befolgst, was erhältst du? Sch.

Im erstern Fall $+(a+b)$;
im andern Fall $+(a-b)$, auch $-(b-a)$
und im dritten Fall $-(a+b)$.

L. Stimmen diese Resultate mit unsern Formeln in der Tabelle überein? Sch. Ja. L. So ist also die praktische Regel (n. 1.) richtig und brauchbar, weil sie uns in allen Fällen genau dasselbe liefert, was wir vorher als richtig erkannt haben. L. Wie willst du aber untersuchen, ob die praktische Regel (n. 2.) gilt? Sch. Ich werde nach ihr ebenfalls alle möglichen Fälle des Subtrahirens vornehmen und nachsehen, ob sie die Resultate der Tabelle liefert. L. Gut. Du findest aber nach der praktischen Regel (nro. 2.)

$$(+a)-(+b)=(+a)+(-b)$$

und dieses letztere gibt nach der Regel (nro. 1.) $+(a-b)$ oder auch $-(b-a)$. — Eben so findest du nach der praktischen Regel (nro. 2.)

$$(+a)-(-b)=(+a)+(+b)=+(a+b)$$

und drittens nach derselben praktischen Regel (nro. 2.)

$$(-b)-(+a)=(-b)+(-a)=-(b+a);$$

endlich viertens nach derselben Regel

$$(-a)-(-b)=(-a)+(+b)=b-a=-(a-b).$$

Und alle diese Resultate stimmen mit den Formeln der Tabelle überein, d. h. sind früher als wahr und richtig erkannt worden, also ist auch die praktische Regel (nro. 2.) brauchbar, weil sie uns in jedem Falle dieselben Resultate liefert, welche bereits früher als richtig eingesehen worden sind, d. h. welche jeden Augenblick wieder auf dem frühern Wege bewiesen werden können.

Eben so überzeugt ihr euch, daß die praktische Regel (nro. 3.) richtig ist, denn sie liefert

$(+a)(+b) = +ab$, $(-a)(-b) = +ab$
$(+a)(-b) = -ab$, $(+a):(+b) = +(a:b)$
$(-a):(-b) = +(a:b)$, $(+a):(-b) = -(a:b)$
und $(-b):(+a) = -(b:a)$;

und alle diese Resultate stimmen mit den Formeln der Tabelle überein.

Wenn ihr also wollt, so könnt ihr statt der speciellen Formeln (n. n. 6 — 11. und 14 — 18.) der Tabelle lieber diese (vorstehenden) praktischen Regeln (I. und II. n. n. 1 — 3.) im Gedächtniß behalten, weil dies vielleicht für euch leichter noch ist.

§. 61. Entstehung der algebraischen Summe.

L. Da es nach der praktischen Regel (nro. 2. §. 60.) ganz einerlei ist, ob man b subtrahirt oder $-b$ addirt, so kann man diesen Umstand bequem benützen, wenn mehre Ausdrücke a, b, c, d, e, f, u. s. f. theils zu einander addirt, theils subtrahirt werden sollen (jeder folgende immer zu (oder von) dem, was durch die Verbindung der vorhergehenden sich ergeben hat). — Sind z. B. c. d, f, etc. zu subtrahiren, so kann man dafür $-c$, $-d$ und $-f$, etc. addiren, und statt der zu addirenden a, b und e kann man auch $+a$, $+b$ und $+e$ schreiben oder denken, so daß der ganze Ausdruck

$$[([(a+b)-c]-d)+e]-f$$

auch als durch bloße Addition aller der additiven oder subtraktiven Zahlen

$$+a,\quad +b,\quad -c,\quad -d,\quad +e,\quad -f$$

entstanden betrachtet werden kann, was eigentlich so geschrieben werden müßte

$$(+a)+(+b)+(-c)+(-d)+(+e)+(-f),$$

aber gewöhnlich bequemer so

$$+a\ +b\ -c\ -d\ +e\ -f$$

geschrieben wird, indem man sich jedes (+ oder —) Zeichen als zu dem Ausdrucke gehörig denkt, dem es vorsteht, und zuletzt alles noch addirt denkt. Einen solchen Ausdruck nennen wir

aber eine **algebraische Summe**; die einzelnen Ausdrücke a, b, c, d, e, f, etc., welche theils addirt theils subtrahirt werden sollen, heißen dagegen die **Glieder** der algebraischen Summe.

L. Was ist also der Ausdruck $a-b+c$? Sch. Eine algebraische Summe. L. Was denkt ihr euch denn bei dieser algebraischen Summe? Sch. Daß b von a subtrahirt, und zu dem was herauskommt wieder c addirt ist. L. Warum denkt ihr euch denn nicht dabei, daß b zu c zuerst addirt und dann das Ganze $b+c$ von a subtrahirt ist? Sch. weis es nicht. L. Wie ich euch schon früher gesagt habe, so ist der Ausdruck $a-b+c$ weder eine Summe (denn da müßte man seine **beiden** Summanden erkennen können), noch eine Differenz (weil weder Minuend noch Subtrahend in ihm erkennbar ist). *) Er kann also höchstens das seyn, was ich so eben eine **algebraische Summe** nannte. Dann muß er aber betrachtet werden als entstehend, wenn man $+a$ und $-b$ und $+c$, alle 3 zu einander addirt. Was denkt ihr euch also bei einer **algebraischen Summe**? Sch. Wo mehre lauter additive und subtraktive Ausdrücke zu einander addirt sind. L. Gut. Werden aber in einer solchen algebraischen Summe die Additionszeichen zwischen dem $+a$ und $-b$ und $-c$ wirklich hingeschrieben? Sch. Nein; die denken wir uns nur hinzu. L. Aber wie würde dann der Ausdruck aussehen, wenn man diese Additionszeichen wirklich hinsetzte? Sch. $+a+-b++c$. L. Nicht ganz richtig; ihr habt vergessen, daß alles, womit operirt wird, in Klammern eingeschlossen werden muß, damit man allemal genau sehen könne, wie der ganze Ausdruck entstanden ist. Wie müßte also diese algebraische Summe eigentlich aussehen? Sch. So: $(+a)+(-b)+(+c)$. L. Richtig. Aber warum schreiben

---

*) In den Ausdrücken $(a-b)+c$ oder $a-(b+c)$ ist beides jedesmal genau erkennbar; der erstere ist eine Summe, der andere eine Differenz, und beide sind nicht nur verschieden, sondern auch nicht einander gleich.

wir bloß $+a -b +c$ dafür; d. h. warum lassen wir die Additionszeichen nebst den Klammern weg? Sch. Doch wohl, weil es bequemer im Schreiben ist. L. Allerdings und weil wir das, was wir weglassen, uns jedesmal noch hinzudenken; was wir aber auch thun müssen, um gerade das zu haben, was man haben soll. — Ich werde nun sehen ob ihr mich verstanden habt. L. Ist denn $a-(b+c)$ auch eine algebraische Summe? Sch. Nein; dieser ist eine Differenz. L. Wohl wahr. Aber könnt ihr euch diesen Ausdruck nicht denken als aus $+a$ und $-(b+c)$ durch Addition zusammengesetzt? Ist es nicht einerlei, ob ihr $-(b+c)$ addirt, oder $b+c$ subtrahirt? Sch. O ja. L. Ist also dieser Ausdruck $a-(b+c)$ auch eine algebraische Summe? Sch. Ja. L. Aus wie vielen Summanden besteht sie? Sch. Aus zweien $+a$ und $-(b+c)$. L. Gut und ihre Glieder sind a und $(b+c)$. Könnt ihr aber für diese algebraische Summe $+a-(b+c)$ auch schreiben $+a-b+c$? Sch. Nein. Denn diese bestünde aus 3 Summanden $+a$ und $-b$ und $+c$. L. Und wäre auch der vorigen nicht einmal gleich. Wenn wir aber schreiben $(a-b)+c$. Ist das eine algebraische Summe? Sch. Der ist eine gewöhnliche Summe. L. Wahr. Ist er aber auch eine algebraische Summe? Sch. Ja; wenn ich ihn so ansehen will, als ob er aus $+(a-b)$ und $+c$ durch Addition entstanden sey. L. Kannst du ihn denn so ansehen. Sch. O ja; denn es ist einerlei, ob ich c addire oder $+c$ addire, weil $c=+c$ ist. L. Gut. Kann man aber in der algebraischen Summe $(a-b)+c$ die Klammern weglassen und bloß $a-b+c$ dafür schreiben. Sch. Nein. L. Wenigstens muß man das erst untersuchen. Was zeigt die Klammer in $(a-b)+c$ an? Sch. Daß zuerst b von a subtrahirt werden soll. L. Es ist aber einerlei, ob b von a subtrahirt oder? Sch. $-b$ zu a addirt wird. L. Gut. Also zeigt die Klammer dasmal an, daß $-b$ zu a addirt wird. Und weil nachher noch c addirt wird oder $+c$, und es einerlei ist, in welcher Ordnung

addirt wird, so zeigt sich dasmal die Klammer als überflüssig, so daß man bloß $a - b + c$ statt $(a - b) + c$ schreiben kann, nicht weil beide Ausdrücke einerlei, sondern weil sie beide einander gleich sind. Ihr seht also in $a - (b + c)$ dürft ihr die Klammern nicht weglassen, d. h. ihr dürft nicht dafür schreiben $a - b + c$; dagegen dürft ihr das letztere thun, wenn ihr $(a - b) + c$ habt. L. Wann dürft ihr also überhaupt Klammern weglassen. Sch. Wenn der durch das Weglassen der Klammern entstehende Ausdruck erstlich eine bestimmte Bedeutung hat, so daß man sich nicht darin irren kann, und wenn er auch noch dem gegebenen Ausdruck gleich ist. *) —

L. Aber nun noch einige Fragen. Sind auch $0 + a$ und $0 - a$ algebraische Summen? Sch. Ich kann mir sie denken, als wenn $+0$ und $+a$ oder $+0$ und $-a$ addirt wären; also kann ich sie als algebraische Summen denken. L. Richtig. Aber würdet ihr auch $+a$ allein, oder $-a$ allein für eine algebraische Summe erkennen? Sch. Nein, das wäre eine bloße additive oder subtraktive Zahl. L. Wahr. Aber ihr könnt doch $0 + a$ und $0 - a$ statt $+a$ oder $-a$ schreiben; wenn ihr euch also $+a$ oder $-a$, als die algebraische Summe $0 + a$ oder $0 - a$ denkt, habt ihr da Unrecht? Sch. Wir können uns das so denken. L. Also könnt ihr selbst das bloße $+a$ oder das bloße $-a$, als eine algebraische Summe euch denken. Und das ist in der Folge bequem.

---

*) Der Lehrer kann hier sogleich bemerken lassen, wie man früher eigentlich hätte schreiben sollen $(am) - (bm)$ statt $am - bm$; eben so

$$\frac{(am)}{b} \text{ statt } \frac{am}{b}; \text{ ferner } \left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{d}\right) \text{ statt } \frac{a}{b} + \frac{c}{d};$$

und dergl.; daß man aber deshalb dort schon die Klammern stillschweigend weggelassen habe, weil diese Ausdrücke an sich doch nie in einem andern Sinne genommen würden, als gerade in demselben, den sie haben, wenn man auch die Klammern noch schreibt. Dagegen muß man die Klammern zuerst jedesmal machen, und nur dann weglassen, wenn durch das Weglassen keine Zweideutigkeit entsteht.

§. 62. Erster Lehrsatz der algebraischen Summen.

L. Wenn ich hinschreibe die algebraische Summe

$$-a+b-(c-d)+f-g$$

was stellt sie vor? Sch. Es sind die 5 additiven und subtraktiven Zahlen, nehmlich $-a$ und $+b$ und $-(c-d)$ und $+f$ und $-g$ alle zu einander addirt. L. Gut. Wenn aber mehres zu einander addirt wird, ist es da einerlei, in welcher Ordnung man addirt? Sch. O ja. L. Könnt ihr also auch hier diese 5 Summanden in anderer Ordnung addiren? Sch. Ja. L. Wie fangt ihr das denn an? Sch. Wir schreiben diese Summanden bloß in anderer Ordnung neben einander hin, z. B. $-a-g-(c-d)+b+f$,

oder $-a+f+b \quad -g-(c-d)$,

oder $-(c-d)+b-g-a+f$

oder noch anders; denn jedesmal denken wir uns diese neben einander hingeschriebene Summanden noch addirt. L. Gut. Was wißt ihr nun von diesen eben jetzt hingeschriebenen Ausdrücken? Sch. Sie sind dem gegebenen obigen gleich. L. Gut. In einer algebraischen Summe kann man also die Glieder beliebig versetzen, wenn man nur jedem sein vorstehendes (+) oder (—) Zeichen läßt.

§. 63. Addition algebraischer Summen.

L. Könnt ihr aber zwei algebraische Summen etwa $-a+b$ und $p-q-r$ zu einander addiren? Sch. O ja, wir schreiben nur $(-a+b)+(p-q-r)$.

L. Da habt ihr wohl recht; denn allerdings heißt ursprünglich addiren nichts weiter als die Summe hinschreiben. Allein nun fangen wir nach und nach an, immer mehr praktisch zu werden. Wenn ich also jetzt frage: „könnt ihr addiren," so verstehe ich jetzt allemal schon stillschweigend darunter, daß ihr nicht bloß die Summe hinschreiben sollt (was jeder kann, der schreibt) sondern ich verstehe bereits, ihr sollt abermals einen ähnlichen Ausdruck hinstellen, der dieser Summe gleich ist. Wenn

ich also frage: könnt ihr diese beiden algebraischen Summen addiren, so verstehe ich darunter: könnt ihr abermals eine algebraische Summe finden, welcher der Summe dieser beiden gleich ist? Wie denkt ihr euch $-a+b$? Sch. Daß $-a$ und $+b$ zu einander addirt sind. L. Gut. Und wie denkt ihr euch $p-q-r$? Sch. Daß p und $-q$ und $-r$ zu einander addirt sind. L. Nicht p, sondern $+p$ müßt ihr sagen (schreiben) weil eine algebraische Summe aus lauter additiven und subtraktiven Zahlen bestehen muß. L. Wenn ihr nun diese beiden algebraischen Summen addiren sollt, was werdet ihr erhalten? Sch. Eine Summe von allen 5 Summanden zusammen. L. Und wie werdet ihr diese schreiben? Sch. Wir werden diese 5 Summanden nur alle neben einander hinschreiben, und bekommen

$$-a+b+p-q-r.$$

L. Ganz richtig. Zwei algebraische Summen werden also zu einander addirt, wenn man zu den Summanden der einen, die Summanden der andern (in beliebiger Ordnung, und indem man jedem sein vorstehendes (+ oder −) Zeichen unverändert läßt) neben einander bloß hinschreibt.

§. 64. Subtraktion algebraischer Summen.

L. Wenn ihr aber die algebraische Summe $-p-q+r$ von der andern $-a+b$ subtrahiren solltet, gleich im praktischen Sinne genommen? Sch. weis es nicht. L. Ihr müßt das wissen. Ihr dürft euch nur hier, wie allemal fragen 1) was ihr thun sollt und 2) nach welchen Formeln der Tabelle sich das machen läßt. Also was sollt ihr thun? Sch. Die algebraische Summe $-p-q+r$ von $-a+b$ subtrahiren. L. Was ist denn diese algebraische Summe? Sch. Eine gewöhnliche Summe aus $-p$ und $-q$ und $+r$. L. Wie wird denn eine gewöhnliche Summe subtrahirt? Sch. Nach (A. β. 2.) der Tabelle, indem man jeden Summanden einzeln, also zuerst $-p$, dann $-q$, endlich $+r$ subtrahirt. L. Gut.

Was sind nun aber diese Summanden $-p$, $-q$ und $+r$? Sch. Additive und subtraktive Ausdrücke. L. Wie werden solche subtrahirt? Sch. Nach der praktischen Regel (§. 60. n. 2.) daß man ihnen das entgegengesetzte Zeichen vorsetzt, und die daraus hervorgehenden $+p$, $+q$ und $-r$ dann addirt. L. Richtig. Wie werdet ihr aber jetzt diese Addition verrichten? Sch. Wir schreiben alles nur so neben einander hin, und erhalten

$$-a+b+p+q-r.$$

L. Warum ist denn dieses Nebeneinander hinschreiben so viel als addirt? Sch. Weil wir uns die ganze dadurch entstehende Summe doch nicht anders denken sollen, als daß in ihr alle die einzelnen additiven und subtraktiven Zahlen (in Klammern eingeschlossen) noch zu einander addirt (d. h. mittelst des Additionszeichens noch mit einander verbunden) werden sollen. L. Sehr brav. Es wird also eine algebraische Summe $-p-q+r$ von einer andern subtrahirt, wenn man die Glieder der zu subtrahirenden (des Subtrahenden) mit dem entgegengesetzten ($+$ oder $-$) Zeichen versieht, und sie dann alle zu denen des Minuenden addirt, d. h. alle neben einander (in beliebiger Ordnung) hinschreibt. *)

§. 65. Multiplikation zweier algebraischen Summen.

L. Wie werden zwei algebraische Summen z. B. $-a+b$ und $-p-q+r$ mit einander multiplicirt, die Frage ebenfalls sogleich im praktischen Sinne genommen, so daß ich nicht bloß das Produkt $(-a+b).(-p-q+r)$ hingeschrieben sehen, sondern auch sogleich wieder eine algebraische Summe haben will, welche diesem Produkte gleich ist? — Wie werdet ihr das anfangen? Sch. Ich frage mich zuerst, was ist eine

---

*) Nachdem noch einige Beispiele gemacht sind, geht man sogleich zu dem nächsten Paragraphen über, weil das eigentliche praktische Einüben noch später erst kommt und einstweilen an gegebenen Beispielen zu Hause getrieben wird.

algebraische Summe? — Eine gewöhnliche, deren Summanden aber alle entweder additive oder subtraktive Ausdrücke sind. L. Nun? Sch. frage ich mich, wie wird mit einer Summe multiplicirt? Nach der (B. α. 1.) der Tabelle, wenn man mit jedem einzelnen Summanden multiplicirt und zuletzt alles addirt. L. Wenn du das nun hier anwenden willst, was wirst du thun müssen? Sch. Ich werde $-a+b$ zuerst mit $-p$, dann mit $-q$, zuletzt mit $+r$ multipliciren und zuletzt alles addiren. L. Gut. Wie wirst du aber $-a+b$ mit $-p$ multipliciren? Sch. Ich werde hier dieselbe Formel anwenden müssen, und auch jeden Summanden, nehmlich $-a$ und $+b$ mit $-p$ multipliciren und alles addiren. L. Sehr gut. Wie wirst du denn aber $-a$ mit $-p$ und dann $+b$ mit $-p$, und so die übrigen einzelnen Multiplikationen verrichten? Sch. Nach der neulichen praktischen Regel (§. 60. II. 3.) „gleiche Zeichen geben (+) und ungleiche geben (—)." *) L. Gut. Was erhältst du also? Sch. Zuerst wenn ich $-a+b$ mit $-p$ multiplicire, bekomme ich $+ap$ und $-bp$, die ich nun zu einander addiren muß, d. h. weil sie wieder lauter additive und subtraktive Zahlen sind, bloß neben einander hinschreiben, so daß ich $+ap-bp$ erhalte. Und wenn ich $-a+b$ mit $-q$ multiplicire, so erhalte ich $+aq-bq$. — Wenn ich endlich $-a+b$ mit $+r$ multiplicire, so gibt dies $-ar+br$. L. Gut. Wie wirst du aber nun diese einzelnen Resultate zu einander addiren? Sch. $+ap-bp$ und $+aq-bq$ und $-ar+br$ sind 3 algebraische Summen, und diese werden addirt, wenn man die Glieder alle neben einander hinschreibt; also erhalte ich

$$+ap-bp+aq-bq-ar+br$$

für das gesuchte Produkt. L. Richtig. Es werden also zwei algebraische Summen mit einander multiplicirt, wenn man jeden Summanden der einen, mit jedem Summanden der andern multiplicirt (dabei die Re-

*) Den Grund dieser praktischen Regel hier noch einmal so abzufragen wie solches (§. 60.) geschehen ist, muß besonders empfolen werden.

gel anwendet, daß gleiche Zeichen (+), und ungleiche (—) geben) und zuletzt alle einzelnen Produkte (in so ferne sie als additive oder subtraktive Zahlen hergestellt sind) neben einander hinschreibt (d. h. addirt). *)

§. 66. Division zweier algebraischen Summen.

L. Wenn ihr nun aber die algebraische Summe

$$+ap-bp+aq-bq-ar+br$$

durch diese andere $-a+b$ dividiren sollt; wie jetzt? Sch. Dann kommt $-p-q+r$ heraus. L. Warum? Sch. Ja, weil $-p-q+r$, wenn wir es mit dem Divisor $-a+b$ multipliciren, wieder den Dividenden

$$+ap-bp+aq-bq-ar+br$$

gibt. L. Dasmal habt ihr recht, weil ich zufällig das vorhergehende Beispiel genommen habe. Aber wenn ihr das Beispiel der Multiplikation nicht vorher gehabt hättet; wie dann? Sch. — L. Könnt ihr nicht so ohngefähr einen Summanden finden, etwa wenn ihr einen einzigen Summanden im Dividenden durch einen einzigen Summanden im Divisor dividirt, z. B. $+ap$ durch $-a$; oder $+aq$ durch $-a$. Nehmt z. B. $\frac{+aq}{-a}$, so erhaltet ihr $-\frac{aq}{a}$, d. h. $-q$. Dies $-q$ ist also vielleicht einer der Summanden des Quotienten. — Habt ihr nun wohl in eurer Tabelle eine Formel, die euch lehrte wie der zweite Summand kann dazu gefunden werden? Sch. O ja, diese (B. β. 18.)

$$\frac{A}{B}=x+\frac{A-Bx}{B}.$$

L. Was lehrt sie euch? Sch. Der zweite Summand $\frac{A-Bx}{B}$ entsteht allemal, wenn man den ersten Summanden x mit dem Divisor B multiplicirt, gibt B.x, solches vom Di-

*) Auch diese Regel wird nur noch an einigen wenigen ähnlichen Beispielen nachgewiesen und dann wird sogleich zu dem nächsten (§.) weiter gegangen.

videnden A subtrahirt, gibt $A - B.x$, und letzteres dann auf's neue durch B dividirt, gibt gerade $\frac{A - Bx}{B}$. L. Richtig. Wenn ihr das nun hier anwendet? Sch. so müssen wir, weil hier $-q$ zum ersten Summanden genommen ist, solchen mit dem Divisor $-a+b$ multipliciren, gibt $+aq-bq$; solches von dem Dividenden $+ap-bp+aq-bq-ar+br$ subtrahiren (dadurch, daß man die Glieder $+aq-bq$ mit dem entgegengesetzten Zeichen, also $-aq+bq$ in beliebiger Ordnung noch dazu schreibt, und dabei $+aq$ und $-aq$, desgleichen $-bq$ und $+bq$, in so ferne sie zusammenaddirt 0 (Null) geben, sogleich wegläßt); zuletzt aber den Rest (Differenz)

$$+ap-bp-ar+br$$

wiederum durch $-a+b$ dividiren. L. Welches sind also nun die Summanden des gesuchten Quotienten? Sch. $-q$ und

$$\frac{+ap-bp-ar+br}{-a+b}.$$

L. Richtig. Kann man aber diesen letztern Quotienten nicht auf's neue in eine Summe verwandeln? Sch. O ja; ich mache das gerade eben so. Ich dividire erst so ohngefähr einen Summanden im Dividenden durch einen Summanden im Divisor etwa $-bp$ durch $+b$, gibt $-p$, und nehme dieses $-p$ zum ersten Summanden. Dann finde ich den zweiten nach derselben Formel $\frac{A}{B} = x + \frac{A - Bx}{B}$ dazu; multiplicire also den ersten Summanden $-p$ mit dem Divisor $-a+b$, gibt $+ap-bp$, subtrahire solches von dem Dividenden

$$+ap-bp-ar+br,$$

gibt (wenn man die Glieder $+ap-bp-ap+bp$, weil sie 0 (Null) geben, sogleich wegläßt) $-ar+br$ und dividire solches abermals durch $-a+b$. L. Welches sind also nun die beiden Summanden? Sch. Der erste $-p$, der andere $\frac{-ar+br}{-a+b}$. L. Gut. Sch. Soll ich diesen letztern Sum-

manden $\frac{-ar+br}{-a+b}$ auf's neue so in eine Summe verwandeln? L. Versuche es. Sch. Ich dividire etwa $-ar$ durch $-a$, gibt $+r$, nehme $+r$ zum ersten Summanden, multiplicire diesen mit dem Divisor $-a+b$, gibt $-ar+br$, subtrahire solches von dem Dividenden $-ar+br$, gibt $-ar+br+ar-br$ oder 0 (Null), und dividire zuletzt solches wiederum durch $-a+b$, gibt aber auch 0 (nach spec. F. n. 13.), und erhalte also 0 zum zweiten Summanden; und $+r$ war dasmal der erste. L. Gut. Du hast also nun gefunden $-q$ und dann noch etwas, das zerlegte sich in $-p$ und noch etwas, welches sich in $+r$ und 0 zerlegte, so daß wir also für unsern gesuchten Quotienten haben

$-q-p+r+0$ oder $-q-p+r$ oder $-p-q+r$. — Werdet ihr das nun auch bei andern solchen Aufgaben machen können? Sch. O ja, das ist nicht schwer. L. So versucht es noch bei einigen. Zuvor aber will ich euch hinschreiben, wie man das, was ihr so eben gemacht und gefunden habt, gewöhnlich für das praktische Arbeiten bequemer schreibt. Nehmlich so:

	Divisor	Dividend	Quotient
	$-a+b$	$+ap-bp+aq-bq-ar+br$	$-q$
		$\pm aq \mp bq$	
1ster Rest	=	$+ap-bp-ar+br$	$-p$
		$+ap-bp$	
		$-\;\;+$	
2ter Rest	=	$-ar+br$	$+r$
		$-ar+br$	
		$+\;\;-$	
3ter Rest	=	0 (Null).	

Und so werdet ihr nun auch gleich die neuen Beispiele schreiben. *)

*) Es wäre eben so leicht, hier jetzt gleich zu zeigen, wie man aus einer algebraischen Summe die Quadrat-Wurzel oder die Kubik-Wurzel zieht. Allein es ist besser, dieses für die folgende Klasse zu versparen.

Erster Unterricht in der Zahlenlehre.

Viertes Kapitel.

Die vier Species des gemeinen Rechnens (mit unbenannten Zahlen).

§. 67. Kenntniß der Ziffern.

Lehrer. Nun Kinder, sind wir so weit, daß wir die Species des gemeinen Rechnens erfinden können. Sagt mir einmal was ist Acht? Sch. Eine Zahl. L. Kann seyn; aber welche Zahl? Sch. Die acht Einheiten hat. L. Aha; nun wissen wir's genau. Acht ist die Zahl, die acht Einheiten hat. — Rund ist dasjenige, was rund ist. Weißt du nichts besseres zu sagen? Sch. —. L. Wenn du gar nichts bessers weißt, so sage lieber: Acht ist die Summe aus sieben und eins. Sch. Ja, aber was ist sieben? L. Sechs und eins. Und sechs ist fünf plus eins. Und fünf ist vier plus eins. Und vier ist wieder drei plus eins. Und drei ist zwei plus eins. Und zwei ist endlich Eins plus Eins. Aber was ist Eins? Sch. —. L. Ich weis das auch nicht besser wie du. Das einfachste ist allen Menschen gleichmäßig bekannt, wenn sie es auch nicht mehr zerlegen können. Wenn wir also nur immer wissen, wie das Zusammengesetzte aus dem einfachen zusammengesetzt ist, dann können wir für's erste zufrieden seyn. Ihr wißt nun, wie zwei aus eins, drei aus zwei, vier aus drei, fünf wiederum aus vier, sechs aus fünf, u. s. f. auch neun aus acht, und zehn aus neun

zusammengesetzt ist, und das ist hinreichend. Jetzt wollen wir für diese Zahlen in der Ordnung die Zeichen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und z setzen, so daß z. B. 4 die Zahl vier, 9 die Zahl neun und z die Zahl zehn vorstellt. Diese Zeichen nennen wir Ziffern.

§. 68. Bezeichnung der aus zehn zusammengesetzten Zahlen.

L. Schreibe mir nun einmal hin, wie du die Zahl zehn mal zehn bezeichnen willst? Sch. Zehn mal zehn ist Hundert; also schreibe ich 100. L. Abermals zwei Fehler auf einmal. Warum erstlich ist zehn mal zehn Hundert? Und warum schreibst du 100 statt Hundert? Sch. weis nichts zu antworten. L. Ist zehn mal zehn eine Zahl? Sch. Ja. L. Welche? Sch. Die entsteht, wenn ich zehn, zehnmal nehme. L. Besser, wenn du zehn Zehner zu einander addirst. Diese Zahl kann man durch das Wort Hundert ausdrücken. Könnte man aber nicht eben so gut jedes andere Wort dafür nehmen. Sch. Wenn ich ein Anderes nähme, so würde man mich nicht verstehen. L. Ja, weil wir einmal das Wort Hundert dafür genommen haben. Wenn wir uns alle über ein anderes Wort eben so verständigten, wie über das Wort Hundert, so könnten wir eben so gut das andere gebrauchen. Wenn du also weißt, eine Zahl ist so viel als Hundert, weißt du dann mehr, als wenn du gewußt hättest, daß sie zehn mal zehn ist. Sch. Nein. L. Keinesweges, denn Hundert ist nur ein neues Wort, welches man eben gebraucht, um zehn mal zehn damit vorzustellen. Wie wirst du nun die Zahl zehn mal zehn oder Hundert bezeichnen, wenn du deine dir bekannten Zeichen wohl überlegst? Sch. Ich kann z.z schreiben. L. Gut; aber auch die Potenz z^2, weil solche gerade z.z vorstellt. Wenn dir nun aufgegeben würde, die Zahl Tausend vorzustellen durch Zeichen, was würdest du dich zuerst fragen müssen? Sch. Was ist Tausend? L. Sehr richtig; nun was ist Tausend? Sch. Zehn mal Hundert.

L. Woher weißt du das? doch wohl nur, weil es dir früher schon vorgesagt worden ist. Es mag auch so gut seyn, wenn ihr nur wohl beachtet, daß Tausend abermals ein bloßes Wort ist, wodurch wir gerade die Zahl vorstellen, welche entsteht, wenn zehn Hunderte zu einander addirt werden, oder die so viele Einheiten hat, als zehn Hunderte zusammengenommen haben. Wie wirst du nun die Zahl Tausend bezeichnen. Sch. Durch $z.z^2$ oder auch durch z^3. L. Gut. Was wird nun z^4 bezeichnen? Sch. So viel als $z.z^3$ d. h. zehn mal Tausend. L. Und was wird z^5 vorstellen? Sch. Soviel als $z.z^4$ oder zehn mal zehntausend. L. Ist auch richtig; aber nach der Formel ist z^5 auch $= z^2.z^3$ und dies stellt vor Hundertmal Tausend; und so sprechen wir diese Zahl gewöhnlich aus. — L. Ferner die Zahl, welche wir hier am bequemsten durch z^6 vorstellen, die sprechen wir aus, Million; wir können aber auch $z.z^5$ oder $z^3.z^3$ dafür setzen; und wir sehen, daß eine Million nichts weiter ist, als ein bloßes Wort, für die Zahl zehn Hundert-Tausende, oder für die Zahl Tausend mal Tausend. Wie wirst du denn aber die Zahl sieben mal Hundert bezeichnen? Sch. Durch $7.z^2$. L. Warum nicht lieber so: 700? Sch. Weil ich nichts hier herein bringen soll, was mir früher über die Zahlen vorgesagt worden ist. L. Ja, weil du alles nur so machen sollst, wie du selber darauf kommst, wenn du das, was du hier früher erlernt hast und deinen eignen Verstand anwenden willst. Und vier mal Tausend wirst du also bezeichnen? Sch. Durch $4.z^3$.

§. 69. Bezeichnung einer jeden beliebigen bestimmt gegebenen Zahl.

L. Ich habe hier eine Metze voll Groschenstücke. Wie viele sind das? Sch. Ich muß sie erst zählen. L. So! zählen! Nun wie machst du denn das? Sch. Ich nehme immer 5 zusammen auf einen Wurf, und 6 solche Würfe machen einen Thaler, und so zähle ich fort, bis ich weis wie viele Thaler es sind. L. So! Wenn es nun aber nicht Groschen sind, sondern

etwa Bohnen? Sch. Dann zähle ich auch so, nehme aber immer 20 Würfe; dann habe ich jedesmal Hundert. L. Endlich werde ich dich verstehen. Du setzest dir diese Zahl der Bohnen aus lauter Zehnern zusammen, oder, wenn sie mehr als zehn Zehner hat, aus lauter Hunderten, oder wenn sie mehr als zehn Hunderte hat, aus Tausenden; u. s. f. Habe ich recht? Sch. Ja. L. Das ist nicht übel. Mit den Zehnern, den Hunderten, den Tausenden u. s. w. bist du schon etwas bekannt; wenn du also jede andere Zahl in solche Zehner, Hunderte, Tausende zerlegst, so führst du die, dir unbekannte Zahl auf lauter bekannte zurück, deren Entstehung dir klar geworden ist. Das ist gut zu nennen. Alles Unbekannte muß in Bekanntes zerlegt, oder aus Bekanntem zusammengesetzt werden, wenn es uns selber bekannt werden will. Also das nennst du zählen? — Das soll euch von nun an erlaubt seyn. Aber wenn du nun gefunden hast, daß du von einem Haufen Groschenstücke oder Erbsen, oder dgl. drei Tausend wegnehmen kannst, dagegen das vierte Tausend nicht mehr voll wird, wie dann? Sch. So habe ich doch mehre Hunderte noch. L. Ganz richtig; wo nicht mehr zehn Hunderte sind, da können doch noch neun oder acht, oder doch vielleicht zwei Hunderte seyn, oder es ist vielleicht ein einziges Hundert noch vorhanden, — vielleicht aber auch gar kein Hundert mehr. Gesetzt nun, es sind noch sieben Hunderte vorhanden, aber das achte Hundert wird nicht mehr voll? Sch. Dann nehme ich die Zehner, und wenn zuletzt ein Zehner nicht mehr voll wird, so habe ich doch die Einer noch dazu. L. Du zerlegst dir also deine Zahl in Tausende, Hunderte, Zehner und Einer; wenn sie aber nun sehr groß wäre? Sch. so würde ich noch zehntausende, Hunderttausende, vielleicht Millionen bekommen. L. Ja vielleicht Billionen, das ist Millionen mal Millionen, Trillionen d. h. Million mal Billionen u. s. w. f. — L. Wenn dieser Haufen Groschenstücke besteht aus drei Tausenden und noch sieben Hunderten und sechs Zehnern und noch vier einzelnen Stücken, wie wirst du diese Zahl nun bezeichnen können? Sch. Ich schreibe

$$4 + 6.z + 7.z^2 + 3.z^3.$$

L. Ganz gut; denn diese Summe bezeichnet die Zahl, welche so viele Einheiten hat, als die einzelnen Summanden zusammengenommen haben. Konntest du aber diese Zahl nicht auch so bezeichnen $3.z^3 + 7.z^2 + 6.z + 4$?

Sch. O ja; es ist einerlei, in welcher Ordnung man addirt. L. Und fast wäre es natürlicher, weil du ja auch die Tausende zuerst weggenommen hast, ehe du die noch bleibenden Hunderte wegnehmen konntest, u. s. f., auch bei dem Ablesen des Zeichens, die Tausende wieder zuerst zu bekommen, hernach die Hunderte, u. s. f. L. Nun merkt wohl; so bezeichnen wir auch gewöhnlich die Zahlen, so habt ihr sie auch im gemeinen Rechnen schon bezeichnet; nur daß man, um nicht so viel zu schreiben zu haben, die Additionszeichen wegläßt (wie schon früher bei der algebraischen Summe), aber auch noch die Potenzen z^3, z^2, und z wegläßt, also bloß 3 7 6 4 schreibt, und sich das übrige dazu denkt.

L. Was denkt ihr euch, wenn ich hinschreibe 749? Sch. Siebenhundert und neun und vierzig. L. Das Wort vierzig kenne ich nicht, oder soll es vielleicht vier Zehner bedeuten? Sch. Ja. L. Also was stellt 749 vor?

Sch. Sieben Hundert und vier Zehner und neun. L. Gut. Du denkst dir also 749 als eine Summe, welche bestimmter so geschrieben werden sollte

$$7.z^2 + 4.z + 9.$$

Ich meine, du denkst dir nicht bei 749, daß 7 und 4 und 9 addirt werden sollen, denn das gäbe 20, sondern du denkst dir, daß sieben mal Hundert oder $7.z^2$, und vier mal zehn (vierzig) oder $4.z$, und 7 addirt werden sollen? Sch. Ja. L. Wenn du nun aber bei einer Zahl findest, daß sie drei mal Tausend, sieben mal zehn und acht Einer enthält, wie wirst du diese schreiben? Sch.

$$3.z^3 + 7.z + 8.$$

L. Richtig. Aber wenn du dir nun das Schreiben erleichtern, die Additionszeichen und die Potenz z^3, so wie z, bloß dazu

denken willst, wie würdest du dann schreiben? Sch. 378. L. Wenn du aber morgen dieses Zeichen 378 wieder ansiehst und, was du heute damit bezeichnet hast, vergessen haben wirst; was wirst du dir dann dabei denken? Sch. Die Summe

$$3.z^2+7.z+8.$$

L. Also nicht dasselbe, wie heute! Dann war deine Bezeichnung schlecht. Die muß immer so seyn, daß man zu jeder Zeit dasselbe darunter versteht, und sich nie irren kann. Du wirst dich daher von nun an des Zeichens 0 (Null) bedienen müssen, womit wir neulich die Differenz $p-p$ bezeichnet haben. Dieses Zeichen hat, wie wir gesehen haben (Spec. F. n. n. 1. 2. 12. 13.), die Eigenschaft, daß es mit irgend etwas multiplicirt, allemal wieder 0 (Null) gibt, und zu irgend etwas addirt, dasselbe wieder gibt; deshalb können wir es hier bequem benützen. Es ist nehmlich $0.z^2=0$ und deshalb

$$3.z^3+0.z^2+7.z+8=3.z^3+7.z+8.$$

Schreibt man demnach nun

$$3\ 0\ 7\ 8,$$

so bedeutet dies $3.z^3+0.z^2+7.z+8$ also auch

$$3.z^3+7.z+8,$$

also drei mal Tausend, sieben mal zehn und acht. Dasselbe 0, womit wir neulich, und also allemal, die Differenz $p-p$ vorgestellt haben, wird also hier bequem gebraucht, um die übrigen Ziffern in diejenigen Stellen zu rücken, damit, wenn man jede mit der sovielten Potenz von z (zehn) multiplicirt, als die Stelle, von der rechten zur linken gezählt, anzeigt, die ganze Summe gerade die verlangte Zahl vorstellt. L. Was wird nun das Zeichen 10 vorstellen? Sch. Zehn. L. Woher weißt du denn das? Was denkst du dir denn bei 38? Sch. Die Summe $3.z+8$, d. h. die Zahl drei mal zehn und acht. L. Gut. Was wirst du dir also bei 10 zu denken haben? Sch. Die Summe $1.z+0$. L. Gut. Diese Summe ist aber, weil $a+0=a$ ist? Sch. $=1.z$, auch $=z$; — also wird doch die Zahl zehn damit vorgestellt. L. Richtig. Aber jetzt siehst du doch auch

ein, daß dies nur vermöge der von uns vorhin eingeführten kürzern Bezeichnung so ist. L. Was bedeutet das Zeichen 100? Sch. Die Summe $1.z^2+0.z+0$ oder, weil $0.z=0$ ist, auch bloß $1.z^2$ oder z^2 d. h. die Zahl Hundert. L. Sehr gut. Du siehst auf diese Art ein, daß 1000 die Zahl z^3 oder Tausend vorstellt, u. s. f. *)

§. 70. Die 4 Species der gemeinen Rechenkunst.

L. Wenn ihr das vorhergehende wohl verstanden habt, so werdet ihr nun leicht einsehen, warum solche numerische Zahlen (so nennt man aber die durch neben einander geschriebene Ziffern entstehenden Zahlzeichen) gerade so zu einander addirt, von einander subtrahirt, mit einander multiplicirt und durch einander dividirt werden, wie solches euch früher in der Rechenkunst vorgeschrieben worden ist. Wenn jede solche numerische Zahl z. B. 57694 nichts weiter ist, als eine Summe, kann sie auch zu den algebraischen Summen gezählt werden? Sch. O ja; die Summanden sind dann lauter additive Zahlen. L. Richtig, oder die Glieder alle addirt. Wenn nun numerische Zahlen z. B. 6493 und 587 addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt werden sollen; d. h. wenn man neue numerische Zahlen verlangt, welche der Summe $6493+587$, oder der Differenz $6493-587$, oder dem Produkt 6493×587, oder dem Quotienten $\frac{6493}{587}$ gleich seyn sollen, werdet ihr die Sätze der algebraischen Summen in Anwendung bringen können? Sch. Was für alle algebraische Summen gilt, das gilt auch für jede einzelne. L. Sehr richtig, und jede numerische Zahl ist eine solche einzelne algebraische Summe.

---

*) Da die Schüler früher schon die Rechenkunst getrieben haben müssen, so begnügt sich der Lehrer hier, den Zusammenhang dieser Lehren mit den bisher vorgetragenen allgemeinen Untersuchungen recht deutlich, recht klar und recht überzeugend hervortreten zu lassen, immer im Auge habend, daß der Schüler nicht rechnen, sondern consequent denken lernen soll.

Um nicht zu weitläufig zu werden, sey hier bloß angedeutet, wie der Lehrer nun 6493 und 587 als zwei Summen addiren läßt, dadurch, daß man die Summanden alle in beliebiger Ordnung addirt. Weil aber wiederum eine Summe von derselben Form (d. h. wiederum eine numerische Zahl) gebildet werden soll, so addirt man die Einer zusammen, dann die Zehner nach der Formel (B. α. 1.) (nach welcher nehmlich

$$9.z + 8.z = (9 + 8).z,$$

während $9 + 8 = z + 7 = 1.z + 7 = 17,$

also $9.z + 8.z = 17.z = 1.z^2 + 7.z$ ist); dann die Hunderter; u. s. w. Sehr in's Einzelne läßt sich der Lehrer hier nicht ein, wenn der Schüler nur recht bestimmt und klar erkennt, daß alles nach den Formeln der Tabelle gemacht wird, und bloß aus den Formeln hätte erfunden werden können.

Eben so das Subtrahiren.

Bei dem Multipliciren thut man gut, die Aufgabe zu zerlegen und zuerst entwickeln zu lassen, wie eine mehrziffrige Zahl mit einer einzigen Ziffer multiplicirt wird (nach der für Summen früher entwickelten Regel, jeden Summanden zu multipliciren und zuletzt alles zu addiren). Hernach kann man eine mehrziffrige Zahl mit einer mehrziffrigen Zahl multipliciren lassen, nach demselben Satze, daß man nehmlich mit jedem der Summanden einzeln multiplicirt und zuletzt alles addirt.

Was endlich die Division der numerischen Zahlen anlangt, so darf man nur die Division der algebraischen Summen auf sie anwenden, oder direkt die Formel

$$\frac{A}{B} = x + \frac{A - Bx}{B},$$

wie solche früher für die Division der algebraischen Summen angewandt worden ist. Wir übergehen hier das Detail und bemerken nur noch einmal, daß es einzig und allein darauf ankommt, daß der Schüler den Zusammenhang dieser Lehren mit den frühen allgemeinen Sätzen hinlänglich klar und überzeugend auffasse.

Für den Fall, daß bei der Division ein Rest bleibt, lehrt die Formel

$$\frac{A}{B} = x + \frac{A - Bx}{B}$$

ebenfalls das nöthige. Sie liefert nehmlich z. B. wenn 15496 durch 375 dividirt werden soll, zuerst 41 als ersten Summanden, und hernach noch $\frac{115}{375}$ als zweiten, so daß man hat

$$\frac{15496}{375} = 41 + \frac{115}{375}, \quad \text{oder} \quad = 41\frac{115}{375},$$

wenn man sich das (+) Zeichen dazu denkt.

Der Schüler muß durch Fragen dahin gebracht werden, daß er dieses alles selber entwickle; dann sieht er deutlich ein, warum unter den letzten Rest noch der Divisor gesetzt, und dieser Quotient (Bruch) hinten hingesetzt werde, wie ihm solches der praktische Rechen-Unterricht vorgeschrieben hat. *)

---

*) Auf gleiche Weise könnte man sogleich das numerische Wurzel-Ausziehen entwickeln lassen. Solches wird jedoch besser bis zur nächsten Klasse verspart.

Erster Unterricht in der Zahlenlehre.

Fünftes Kapitel.

Von den Brüchen und den positiven und negativen Zahlen.

§. 71. Enwicklung des Begriffes Bruch.

Lehrer. Wißt ihr denn, was ein Bruch, oder eine gebrochene Zahl ist? Sch. Ein Bruch ist ein Theil vom Ganzen. L. So ist es euch in der Rechenkunst gelehrt worden. In der Rechenkunst ist diese Erklärung auch nicht unrichtig, weil man daselbst immer die gebrochene benannte Zahl meint. Allein erstlich dürft ihr nichts hier herein bringen, was euch in der Rechenkunst gelehrt worden ist, weil wir selbst erst die Rechenkunst erfinden wollen; und dann brauchen wir hier die gebrochene unbenannte Zahl, von der man nicht gut sagen kann, daß sie ein Theil vom Ganzen ist. Auf meine Frage: was ist ein Bruch? hättet ihr also vernünftiger geantwortet: das können wir noch nicht wissen. — Kann man in dem Quotienten $\frac{a}{b}$ statt a und statt b setzen, welchen Zahlen-Ausdruck man will? Sch. Ich denke. L. Ja; denn wir haben den Quotienten zwar anfänglich als eine ganze Zahl, nachher aber, wie solches bei der Subtraktion besonders gezeigt worden ist, als eine bloße angezeigte Division genommen, weil die Formeln unserer Tabelle bloß lehren, wie das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren

sich zu einander verhalten. — Ihr könnt also z. B. —5 statt a und —3 statt b setzen, und von dem Quotienten $\frac{-5}{-3}$ gilt noch immer dasselbe, was von dem Quotienten $\frac{a}{b}$ gilt. So oft nun in dem Quotienten $\frac{a}{b}$, statt a und statt b lauter (absolute, ganze) Zahlen gesetzt werden, so daß ihr z. B. die Quotienten $\frac{5}{3}$ $\left(\text{nicht } \frac{-5}{3}, \text{ auch nicht } \frac{-5}{-3}\right)$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{4}$ u. s. w. erhaltet, so nennen wir solche Quotienten noch insbesondere Brüche oder gebrochene Zahlen, wenn sie nicht mehr ganze Zahlen sind. Ist also z. B. $\frac{5}{3}$ dividirt ein Bruch? Sch. Ja. L. Auch $\frac{3}{8}$? Sch. O ja. L. Auch $\frac{12}{3}$. Sch. Ja. L. Nein; $\frac{12}{3}$ ist $=4$, deshalb bleibt $\frac{12}{3}$ zwar noch ein Quotient (eine angezeigte Division) aber keiner von denen, die wir Brüche genannt haben. L. Ist $\frac{-3}{5}$ ein Bruch? Sch. Ja. L. Abermals Nein. Denn —3 ist ja keine (absolute, ganze) Zahl. Es ist also $\frac{-3}{5}$ zwar ein Quotient, aber keiner von denen, die wir so eben Brüche zu nennen uns vorgenommen haben. L. Ist $-\frac{2}{3}$ ein Bruch? Sch. Ja. L. Abermals nein; $-\frac{2}{3}$ ist eine subtraktive Zahl; aber das Glied derselben nehmlich $\frac{2}{3}$ selbst, das nannten wir einen Bruch. Die subtraktive Zahl $-\frac{2}{3}$ ist nicht einmal ein Quotient, also noch weniger ein Bruch. Wißt ihr nun genau, was ein Bruch ist? Sch. Ja.

§. 72. Wie man mit Brüchen operirt.

L. Werdet ihr aber auch angeben können, d. h. jetzt selber erfinden, wie man mit Brüchen arbeitet, ich meine, wie man Brüche addirt, subtrahirt, multiplicirt, sowohl unter sich, als mit einer ganzen Zahl? Sch. Da ein Bruch nichts weiter ist, als ein Quotient, so werde ich die Formeln der Tabelle für Quo-

tienten anwenden können. L. Ganz richtig. Was erhaltet ihr also z. B. für die Summe (gemischte Zahl) $7 + \frac{3}{4}$, was man gewöhnlich bloß so: $7\frac{3}{4}$ schreibt, wenn ihr einen Bruch dafür setzen wollt? Sch. Ich werde die Formel (B. β. 11.)

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$$

anwenden, welche lehrt, wie man einen Quotienten $\frac{b}{c}$ zu einer einfachen Zahl a addirt. L. Wie mußt du es also machen? Sch. Die Formel lehrt, daß man die Zahl a erstlich mit dem Divisor c multiplicirt, hernach den Dividenden b dazu addirt, den Divisor c aber beibehält. L. Also? Sch. Ich werde also, um $7\frac{3}{4}$ oder vielmehr $7 + \frac{3}{4}$ in einen Bruch zu verwandeln, die Zahl 7 mit dem Divisor 4 multipliciren, gibt 28, den Dividenden 3 dazu addiren, macht 31, und dann den Divisor 4 unverändert lassen, gibt $\frac{31}{4}$ als Resultat. L. Richtig. Gesetzt aber, ich gebe euch den Bruch $\frac{59}{8}$ und verlange, ihr sollt ihn in eine gemischte Zahl, d. h. in eine Summe aus der größtmöglichsten ganzen Zahl und einen Bruch verwandeln. Sch. Wir haben ja eine Formel gehabt, welche lehrt, einen Quotienten in eine Summe zu verwandeln; die kann ich wohl anwenden. L. Ja wohl, die Formel (B. β. 18.)

$$\frac{A}{B} = x + \frac{A - Bx}{B};$$

aber wie wirst du sie hier anwenden? Sch. Ich werde zuerst die größte ganze Zahl suchen und diese zum ersten Summanden nehmen, und dann den zweiten Summanden nach der Formel dazu suchen. L. Recht gut; aber woher wirst du denn wissen, daß die Zahl, welche du nimmst, die größte ganze Zahl ist? Sch. Wenn, nachdem ich sie mit dem Divisor 8 multiplicirt und was herauskommt, von dem Dividenden 59 subtrahirt habe, ein Rest bleibt, kleiner als der Divisor. L. Welche Zahl ist das hier? Sch. Die Zahl 7. Und ich finde also nach der obigen Formel $7 + \frac{3}{8}$ oder $7\frac{3}{8}$ statt des gegebenen Bruches $\frac{59}{8}$.

L. Ganz gut. — Könnt ihr denn aber zwei Brüche z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$ addiren? Sch. Nach der Formel (B. β. 14.)

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},$$

erhalte ich $\frac{38}{24}$. L. Und wenn du $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{6}$ subtrahiren sollst? Sch. So wende ich die Formel (B. β. 15.)

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

an, und erhalte $\frac{2}{24}$ zum Resultat.

Ohne weitläufiger zu seyn, mag bloß noch bemerkt werden, daß der Lehrer auf dieselbe Weise das Multipliciren und das Dividiren der Brüche an einigen Beispielen abfragt, sowohl der Brüche unter sich, als auch Brüche mit ganzen und gemischten Zahlen; immer so, daß der Schüler erkennt, wie seine Formeln der Tabelle ausreichen, um alles verlangte, sogar auf verschiedenen Wegen, zu erhalten, welche verschiedene Wege der Lehrer noch insbesondere berücksichtigen lassen wird.

§. 73. Begriff der positiven und negativen Zahlen.

L. Wenn ihr die subtraktive Zahl $-a$ hinschreibt, ist a eine ganze oder eine gebrochene Zahl? Sch. Es kann a alles bedeuten. L. Bleibt denn $-a$ noch immer eine subtraktive Zahl, ihr mögt für a setzen, was ihr wollt? Sch. Ja, weil wir es früher so angenommen haben. L. Gut. Wenn ihr also selber wieder z. B. -5 statt a setzt, so daß aus $-a$ jetzt $-(-5)$ wird, ist das noch eine subtraktive Zahl. Sch. Weil ich es so angenommen habe, ja. L. Ganz richtig. Nun ist aber nach der speciellen Formel (n. 6.), $-(-5)=+5$; ist

---

*) Der Lehrer zeigt dasselbe noch aus verschiedenen Gesichtspunkten, jedesmal aber genau darauf haltend, daß nur solche Sätze und Formeln angewandt werden, welche bereits da gewesen sind.

denn $+5$ eine subtraktive Zahl? Sch. Nein. L. Also ist $-(-5)$ eine subtraktive Zahl und auch keine? Sch. Das wird wohl so seyn, wie Sie uns neulich schon bei der Summe und der Differenz gesagt haben. Obgleich z. B. $8+5=15-2$ ist, so ist doch die Summe $8+5$ nicht zugleich die Differenz $15-2$, sondern sie sind beide noch sehr verschieden und bloß einander gleich. L. Ganz richtig; d. h. uns kommt es nur auf die Art der Zusammensetzung an. Der Ausdruck $-(-5)$ ist anders zusammengesetzt, als der Ausdruck $+5$; es sind also $-(-5)$ und $+5$ zwei sehr verschiedene Ausdrücke, und solche bloß einander gleich, d. h. in den Rechnungen für einander zu setzen. Der erstere $-(-5)$ ist also nie ein additiver Ausdruck selber, sondern er ist bloß dem additiven Ausdruck $+5$ gleich. Und eben so ist der andere $+5$ nie selber ein subtraktiver Ausdruck, obgleich er dem subtraktiven Ausdruck $-(-5)$ gleich ist. — Auf dieselbe Weise ist der additive Ausdruck $+(-5)$ dem subtraktiven -5 gleich; und auch noch der subtraktive Ausdruck $-(+5)$ dem subtraktiven -5 gleich.

Wenn nun in einer additiven Zahl $+a$, oder in einer subtraktiven Zahl $-a$, das Glied a selber bloß eine absolute ganze oder gebrochene Zahl ist (also nicht auf's neue eine additive oder subtraktive Zahl, oder gar noch ein anderer, bekannter oder uns zur Zeit noch ganz unbekannter Ausdruck ist) so nenne ich die erstere insbesondere eine positive Zahl, die andere eine negative.

Der Lehrer fragt dies noch gehörig ab, und macht den Schüler noch insbesondere darauf aufmerksam, daß, so lange a noch alles bedeuten kann, man unmöglich wissen könnte, ob $+a$ eine positive Zahl, und $-a$ eine negative Zahl sey oder nicht; während allemal $+a$ eine additive Zahl und $-a$ eine subtraktive Zahl bleibe.

Zuletzt fragt der Lehrer den Schüler noch, wie er mit positiven und negativen Zahlen arbeiten würde. Der Schüler muß sogleich einsehen, daß die Formeln, welche lehren, wie mit

additiven und subtraktiven Ausdrücken operirt wird, zugleich auch für die positiven und negativen Ausdrücke gelten müssen.

Endlich kann man den Schüler noch darauf aufmerksam machen, daß die ganzen, gebrochenen, positiven und negativen Zahlen-Ausdrücke die einfachsten Zahlen oder Zahlenbegriffe sind, so daß man deshalb alle anderen Ausdrücke, d. h. alle durch die Operationen noch so sehr zusammengesetzten Ausdrücke, wenn sie nur bloß Ziffern enthalten, also bestimmt, d. h. nicht mehr allgemein sind, für den praktischen Bedarf in diese einfachsten zu verwandeln pflegt. So z. B. verwandelt man $-(-5)$ in $+5$, $-(+5)$ oder $+(-5)$ in -5; so $\frac{2-5}{8}$ in $-\frac{3}{8}$, so $-(2-5)$ in $-(-3)$ d. h. in $+3$; $\frac{-(2-5)}{-2}$ in $-\frac{3}{2}$ u. s. w. f.

Erster Unterricht in der Zahlenlehre.

Sechstes Kapitel.

Praktisches Arbeiten.

§. 74.

Da es nicht die Absicht ist, ein Lehrbuch hier zu liefern, sondern nur so ohngefähr eine Gebrauchs-Anweisung des ersten Bandes der: reinen Elementar-Mathematik Berlin 1825, so kommt es hier nicht darauf an, den ganzen Vortrag der Zahlenlehre durchzunehmen, sondern vorzüglich das allererste desselben recht anschaulich zu geben, damit der Leser in den Geist dieser Vorträge recht eindringen möge, um in demselben Geiste auch die folgenden Kapitel unsers Lehrbuches, welches freilich seiner Eigenthümlichkeit wegen vorher recht tüchtig und wiederholt wird studirt werden müssen, von dem Schüler selbstthätig entwickeln lassen zu können.

Wir wollen uns daher nur noch über einige Hauptpunkte des nun folgenden Unterrichts Andeutungen erlauben. Wir rechnen nehmlich 30 Stunden Unterricht auf die allgemeinen Lehren, d. h. auf die Entwicklung der Formeln der Tabelle und der Sätze der algebraischen Summen. Zu der Lehre der Ziffern, des Zahlensystems, der Brüche, und der positiven und negativen Zahlen, sollen höchstens 6 Stunden verwendet werden, weshalb die Lehre der Decimalbrüche und des numerischen Quadrat- und Kubikwurzel-Ausziehens gänzlich übergangen wird. *) Einzig

*) Auch in der nächsten Klasse wird die Lehre der Decimalbrüche kein eignes Unterrichts-Objekt, sondern nur so gelegentlich, wenn gerade, etwa

und allein kommt es dabei darauf an, daß der Schüler nicht praktisch rechnen lerne, sondern nur einsehe, daß seine allgemeinen Lehren, wenn er sie anwenden will, alle diese besondern, ihm größtentheils aus dem früher getriebenen praktischen Rechnen schon bekannten Lehren, in sich schließen.

Während des Verlaufes dieser 36 Stunden hat der Schüler regelmäßig von Stunde zu Stunde zu Hause, theils die allgemeinen Beweismethoden an einzelnen ihm mitgegebenen Formeln wiederholt angewandt, theils einzelne leichte Verwandlungen nach den Formeln wirklich vorgenommen, theils (besonders wenn 1 Woche Ferien dazwischen fallen) eine etwas zusammenhängendere Arbeit versucht, und theils die Sätze und praktischen Regeln für das Operiren mit additiven und subtraktiven Zahlen und mit algebraischen Summen, auswendig gelernt; welches letztere besonders Noth thut, damit ihm die Materialien nicht mangeln, an und mit denen er seine Geistes-Gymnastik weiter fortsetzen kann. Eben so läßt man ihn dazwischen entwickeln, wie viel Elementarformeln der Tabelle er braucht, um nach ihnen jeden einfachen Ausdruck, und Summe und Differenz und Produkt und Quotient, paarweise addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren zu können; und auf welche geringere Zahl von Formeln man zurück geführt wird, sobald man von zwei zu verbindenden Ausdrücken, den einen jedesmal als einen einfachen ansehen und behandeln will.

Ferner wird bei jedem Ausdruck, während des Verlaufes

---

bei dem Auflösen der Gleichungen d. h. bei Uebungs-Beispielen, solche Aufgaben vorkommen, abgemacht. Es ist völlig hinreichend, wenn der Schüler die Decimalbrüche anfänglich nach den Formeln der Quotienten behandelt, nur jedesmal das Endresultat in Form eines Decimalbruches schreibt; die praktische Fertigkeit muß er sich durch die Uebungs-Beispiele des Lehrbuches selber verschaffen, und verschafft sich solche, wenn er auf diesem Wege unterrichtet worden, der jedesmaligen Erfahrung gemäß, sehr leicht. Noch weniger behellige man den Schüler mit abgekürzter Multiplikation oder Division sehr lange. Zwei Beispiele reichen für den Zweck des Unterrichts vollkommen aus.

dieser ersten 36 Unterrichtsstunden jedesmal gefragt, was dieser Ausdruck ist, ob eine Summe, oder Differenz, oder ein Produkt, Quotient, oder eine Potenz, oder eine additive oder subtraktive Zahl, oder etc. etc. etc.; und genau darauf gesehen, daß der Schüler jeden Ausdruck genau als den erkenne, welcher er wirklich ist. *) Denn wenn er z. B. $-\frac{3}{4}$, welches eine subtraktive (auch eine negative) Zahl ist, für einen Quotienten oder Bruch halten, oder wenn er den Quotienten $\frac{-3}{4}$ für eine subtraktive Zahl ansehen wollte, so würde er auf jeden dieser Ausdrücke Formeln anwenden, die für ihn nicht gelten, und dann nothwendig unrichtige Resultate erhalten; überhaupt wäre dann an ein selbstthätiges, sich stets vollkommen bewußtes Arbeiten nicht mehr zu denken, weil er sogar die Formeln nicht mehr anwenden könnte, eben weil ihre Anwendung bloß darin besteht, daß man für eine Form, eine andere, der erstern gleiche Form setzt, dieses aber wieder voraussetzt, daß man die Form selbst genau kenne. Da nun in der Regel 20 Unterrichtswochen für jedes Semester angenommen werden dürfen, also 60 Unterrichtsstunden, so bleiben noch 24 Stunden (in 8 Wochen übrig), welche bloß zum praktischen Buchstabenrechnen (in dieser untersten mathemat. Klasse) verwendet werden können. Dies wird nun erst der wahre bildende Theil des Unterrichts; aber dieser erfordert auch die größte Sorgfalt des Lehrers. Praktische Fertigkeit im elementaren Buchstabenrechnen zu erzielen ist hier vorzüglicher Zweck und geistige, formelle Bildung bleibt doch noch der Hauptzweck. In folgendem Beispiele mag nun angedeutet seyn, wie diese beiden Zwecke, nach der vorliegenden Unterrichtsmethode, mit Leichtigkeit und sicher erreicht worden sind.

L. Multiplicire einmal die beiden algebraischen Summen

$$-\tfrac{2}{3}a+\tfrac{3}{4}b-5c \quad \text{und} \quad +\tfrac{5}{6}a-\frac{4b}{5}-c+2d$$

---

*) Und dies ist gerade der gewöhnliche Fehler, daher solcher mit der größten Sorgfalt beseitigt werden muß.

mit einander. Wie wirst du das anfangen? Sch. Ich werde nachsehen, wie zwei algebraische Summen mit einander multiplicirt werden. L. Gut; wie geschieht das? Sch. Man muß jedes Glied der einen mit jedem Gliede der andern multipliciren, dabei hinsichtlich der vorzusetzenden (+ oder —) Zeichen die praktische Regel anwenden, daß gleiche Zeichen (+) und ungleiche (—) geben, und zuletzt alles addiren d. h. neben einander in eine algebraische Summe hinschreiben. L. Gut. Du wirst also die Glieder der erstern algebraischen Summe zuerst mit $+\frac{5}{6}a$, dann mit $-\frac{4b}{5}$, hernach mit $-c$, zuletzt aber mit $+2d$ durchmultipliciren, und zuletzt alles addiren, d. h. neben einander hinsetzen. Wenn du nun anfängst? Sch. So muß ich zuerst $-\frac{2}{3}a$ mit $+\frac{5}{6}a$ multipliciren. L. Gut; wie wirst du das anfangen? Sch. Ich werde die Glieder $\frac{2}{3}a$ und $\frac{5}{6}a$ bloß mit einander multipliciren, und dem, was herauskommt, nach der Regel der Zeichen, das (—) Zeichen vorsetzen. L. Sehr gut. Wie wirst du aber diese Glieder $\frac{2}{3}a$ und $\frac{5}{6}a$ mit einander multipliciren? Sch. weis es vielleicht nicht. L. Du gibst noch immer nicht recht acht. Was mußt du dich jedesmal, so oft du irgend etwas vornehmen sollst, zuerst fragen? Sch. Was die Ausdrücke sind, und was ich mit ihnen thun soll. L. Ganz richtig. Nun was sind denn diese Ausdrücke? Sch. Quotienten. L. Da irrst du dich schon wieder. Der Ausdruck $\frac{2a}{3}$ hat die Form des Quotienten aber $(\frac{2}{3})a$ oder, wie man das gewöhnlich schreibt $\frac{2}{3}a$ ist? Sch. Ein Produkt. L. Richtig. Also hast du? Sch. zwei Produkte mit einander zu multipliciren. Wie geschiehet dies? Sch. Es ist einerlei, in welcher Ordnung die Faktoren mit einander multiplicirt werden. L. Gut. Du erhältst also? Sch. $\frac{2}{3}.a.\frac{5}{6}.a$. L. Ganz richtig. Gewöhnlich aber, weil es praktischer ist, multiplicirt man lieber die Ziffern-Faktoren zuerst mit einander, also? Sch. bekomme ich $\frac{2}{3}.\frac{5}{6}.aa$. L. Auch richtig; aber man sieht es gerne, wenn die Brüche $\frac{2}{3}$

und $\frac{5}{6}$ sogleich mit einander praktisch multiplicirt werden, d. h. wenn das Produkt sogleich wieder in einen Bruch verwandelt wird; dies gibt aber? Sch. nach Form. (B. β. 16.), $\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6}$ oder $\frac{10}{18}$ oder nach Formel (B. β. 10.) $\frac{5}{9}$. L. Richtig; also was erhältst du, wenn du $\frac{2}{3}a$ mit $\frac{5}{6}a$ multiplicirst? Sch. $\frac{5}{9}aa$. L. Und was erhältst du also, wenn du den ersten Summanden $-\frac{2}{3}a$ mit dem $+\frac{5}{6}a$ multiplicirst? Sch. $-\frac{5}{9}aa$. L. Gut. Dafür kannst du auch schreiben, wenn du willst, $-\frac{5}{9}.(a^2)$, auch bloß $-\frac{5}{9}a^2$, in so ferne man unter $\frac{5}{9}a^2$ nie $(\frac{5}{9}a)^2$, sondern jedesmal $\frac{5}{9}(a^2)$ versteht. — L. Was wirst du nun erhalten, wenn der zweite Summand $+\frac{3}{4}b$ mit $+\frac{5}{6}a$ multiplicirt wird? Sch. $+\frac{15}{24}ba$. L. Sehr gut; nur pflegt man, weil es einerlei ist, in welcher Ordnung mehre Zahlen multiplicirt werden, allemal, wo möglich, die Faktoren alphabetisch oder lexicographisch zu ordnen, also daß man nicht ba, sondern lieber ab schreibt. Ferner läßt sich $\frac{15}{24}$ aufheben, und nach Form (B. β. 10.) $\frac{5}{8}$ dafür setzen; also erhältst du? Sch. $+\frac{5}{8}ab$. L. Und das folgende Produkt wird? Sch. $= -5 \cdot \frac{5}{6} . ac$. L. Abermals recht; aber wie wirst du 5 mit $\frac{5}{6}$ multipliciren? Sch. Nach der Formel (B. β. 3.), indem man den Dividenden 5 mit der Zahl 5 multiplicirt, und den Divisor 6 als solchen beibehält. Ich erhalte daher $\frac{25}{6}ac$. L. Jetzt bloß $\frac{25}{6}$, im Ganzen aber $-\frac{25}{6}ac$. — Was wirst du nun weiter thun? Sch. Ich werde jetzt eben so alle Glieder der erstern algebraischen Summe $-\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b-5c$ mit $-\frac{4b}{5}$ multipliciren. L. Also erhältst du zuerst? Sch. Zuerst habe ich wieder zwei Produkte zu multipliciren, nehmlich $-\frac{2}{3}a$ mit $-\frac{4b}{5}$. L. Halt einmal; nicht so rasch. Erstlich sind $-\frac{2}{3}a$ und $-\frac{4b}{5}$ nicht Produkte, sondern subtraktive Zahlen. Diese werden aber mit einander multi-

plicirt, wenn man ihre Glieder $\frac{2}{3}$a und $\frac{4b}{5}$ mit einander multiplicirt und dem Ganzen das (+) Zeichen vorsetzt. Aber diese Glieder $\frac{2}{3}$a und $\frac{4b}{5}$, sind diese alle beide Produkte? Sch. Das erstere ist ein Produkt. L. Aber das zweite $\frac{4b}{5}$? Sch. ist ein Quotient. L. Du hast also hier ein Produkt $\frac{2}{3}$a mit einem Quotienten zu multipliciren. Wie machst du das? Sch. Ich betrachte $\frac{2}{3}$a als einen einfachen Ausdruck und multiplicire ihn mit dem Quotienten $\frac{4b}{5}$ nach der Formel (B. β. 3.) und erhalte, weil $\frac{2}{3}$a mit 4b multiplicirt $\frac{8}{3}$ab gibt, jetzt $\frac{\frac{8}{3}ab}{5}$. L. Gut. Aber diesen Ausdruck mußt du nun auf's neue verwandeln. Sch. Jetzt habe ich ein Produkt $\frac{8}{3}$ab durch 5 zu dividiren; solches geschiehet nach Formel (B. β. 3.) rechts, wenn ich bloß den einen Faktor $\frac{8}{3}$ dividire und den andern ab unverändert als Faktor beibehalte. L. Gut. Was gibt es aber, wenn du $\frac{8}{3}$ durch 5 dividirst? Sch. $\frac{8}{15}$ nach der Formel (B. β. 7.). Es kommt also $\frac{8}{15}$ab. L. Und zwar $+\frac{8}{15}$ab. Sch. Dasselbe hätte ich aber doch auch erhalten, wenn ich $\frac{2}{3}$a und $\frac{4b}{5}$ wie zwei Produkte, d. h. zuerst $\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ und hernach a mit b multiplicirt hätte. L. Das trifft dasmal wohl zu; weißt du aber warum? Sch. Weil ich $\frac{4b}{5}$ auch als ein Produkt betrachten kann. L. Wenn du sagen willst, weil der Quotient $\frac{4b}{5}$ nach der Formel (B. β. 3.) rechts, dem Produkt $\frac{4}{5}$b gleich ist, also letzteres statt seiner gesetzt werden kann, dann hast du recht; außerdem aber nicht. — Uebrigens ist es praktisch bequem, wenn du $\frac{4}{5}$b statt $\frac{4b}{5}$ setzest, oder gesetzt denkest, weil dann alles nach einer und derselben Form behandelt werden kann.

Ich nehme aber absichtlich verschiedene Formen, damit ihr euch desto mehr üben sollt.

Auf diese Weise fährt nun der Lehrer fort, die einzelnen Glieder durchmultipliciren zu lassen; und nachdem dieses geschehen ist, läßt er alle die erhaltenen Resultate addiren, wie es das Multipliciren der algebraischen Summen verlangt. Dieses Addiren besteht aber nach der Definition der algebraischen Summe bloß darin, daß man diese statt der einzelnen Produkte erhaltenen additiven und subtraktiven Ausdrücke bloß neben einander hinschreibt; also erhält der Schüler in diesem Beispiele als Resultat die algebraische Summe

$$-\tfrac{5}{9}a^2+\tfrac{5}{8}ab-\tfrac{25}{6}ac+\tfrac{8}{15}ab-\tfrac{3}{5}b^2+4bc+\tfrac{2}{3}ac-\tfrac{3}{4}bc$$
$$+5c^2-\tfrac{4}{3}ad+\tfrac{3}{2}bd-10cd.$$

L. Dieses ist nun das gesuchte Resultat; allein im Praktischen sucht man jedesmal von mehren Ausdrücken, die einander gleich sind, die einfachsten; deshalb wirst du hier noch suchen müssen, so viel wie möglich Glieder dieser algebraischen Summe zu vereinigen. Erstlich hast du die Summanden $+\tfrac{5}{8}ab$ und $+\tfrac{8}{15}ab$, welche addirt werden sollen, und $+(\tfrac{5}{8}ab+\tfrac{8}{15}ab)$ d. h. nach der Formel (B. α. 1.), $+(\tfrac{5}{8}+\tfrac{8}{15}).ab$ geben. Aber $\tfrac{5}{8}+\tfrac{8}{15}$? Sch. gibt nach Formel (B. β. 14.) $\tfrac{139}{140}$. L. Also geben die gedachten beiden Glieder das einzige $+\tfrac{139}{140}ab$. L. Welche Glieder wirst du nun noch so vereinigen können? Sch. $-\tfrac{25}{6}ac$ und $+\tfrac{2}{3}ac$. L. Wie wirst du das machen? Sch. Da diese beiden additiven und subtraktiven Ausdrücke zu einander addirt werden sollen, so werde ich die Regel (§. 60. II.) anwenden, daß man das eine Glied von dem andern subtrahirt und dem Resultat das ($+$ oder $-$) Zeichen des letztern vorsetzt. Dann erhalte ich hier $-(\tfrac{25}{6}ac-\tfrac{2}{3}ac)$.

Aber $\tfrac{25}{6}ac-\tfrac{2}{3}ac$ verwandelt sich wieder, weil hier Produkte subtrahirt sind, nach (B. α. 2.) in $(\tfrac{25}{6}-\tfrac{2}{3}).ac$, während $\tfrac{25}{6}-\tfrac{2}{3}=\tfrac{25}{6}-\tfrac{4}{6}=\tfrac{21}{6}$ ist nach (B. β. 2.) rechts, oder $=\tfrac{7}{2}$ nach (B. β. 10.). Also bekomme ich im Ganzen $-\tfrac{7}{2}ac$. L. Ganz richtig. Die nächsten Glieder, die vereinigt werden können,

sind $+4bc$ und $-\frac{3}{4}bc$, und diese zusammen addirt, geben? Sch. $+(4-\frac{3}{4})bc$ d. h. $+\frac{13}{4}bc$, weil $4-\frac{3}{4}$ nach Formel (B. β. 12.) $=\frac{13}{4}$ ist. L. Welches ist nun deine durch Multiplikation der beiden gegebenen algebraischen Summen erhaltene? Sch. $-\frac{5}{9}a^2+\frac{139}{40}ab-\frac{3}{5}b^2-\frac{7}{2}ac+\frac{13}{4}bc+5c^2-\frac{4}{3}ad+\frac{3}{2}bd-10cd$. L. Gut.

Dies ist ohngefähr der Weg, auf welchem in dem Geiste der vorliegenden Methode praktische Buchstabenrechnung getrieben worden ist. Man läßt viele der Uebungs-Beispiele des Lehrbuches, auch diejenigen, in welchen Potenzen vorkommen, durcharbeiten, gibt deren täglich zu Hause auf, läßt immer mehr mechanisch arbeiten, (was bei dem häuslichen Arbeiten ohnedies geschieht, so daß die Lehrstunden doch vorzüglich benützt werden müssen, das zu Hause mechanisch getriebene wiederum in das Bewußtsein treten zu lassen), wirft aber plötzlich wiederum das alte *warum*? hin, um sich eine solche Arbeit, oder doch einen kleinen Theil derselben, bis zu den allerersten Sätzen zurück zergliedern zu lassen. — Man ahnet nicht, welch herrlichen Erfolg dieses Arbeiten zeigt. — Der Schüler bekommt eine solche Sicherheit, und von dem Ganzen, weil er solches so oft rückwärts durchlaufen muß, eine so einfache und klare Uebersicht, daß er hier, *in dieser ersten Unterrichts-Klasse allein den Grund legt*, die Analysis bis in ihre innersten Tiefen ohne Anstrengung *späterhin* verfolgen zu können.

Schluß-Bemerkung.

Wir beschließen diesen ersten Unterricht in den calculativen Theilen der Mathematik mit noch folgenden Bemerkungen:

1) Es wurden bei dem hier zuletzt beschriebenen praktischen Arbeiten vorzüglich Divisions-Beispiele (algebraischer Summen) genommen, weil in ihnen die übrigen Operationen alle mit vorkommen.

2) Um nicht mit dem Aufschreiben der zu Hause zu machenden Aufgaben so viel Zeit zu vertragen, schrieb der Lehrer irgend eine Gleichung, und vorzüglich die Gleichung

$$(A+B)^m = A^m + m.A^{m-1}B + \frac{m(m-1)}{2}A^{m-2}B^2$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}A^{m-3}B^3 +$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\ .\ 3\ .\ 4}A^{m-4}B^4$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5}A^{m-5}B^5 +$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ 6}A^{m-6}B^6 + \ldots$$

hin, und ließ nun in der Stunde die einzelnen Glieder rechts berechnen, wenn 2, 3, 4, 5, 6, etc. statt m gesetzt wird. Dann ließ er zu Hause etwa 19 statt m setzen, und alle 20 Glieder berechnen. Dann setzte der Lehrer in der Stunde etwa 2a statt A und —3b statt B, und wiederum für m einzelne Werthe, namentlich auch etwa $\frac{4}{3}$ statt m, und ließ nun die einzelnen Glieder berechnen, in der Stunde. Hernach ließ er aber fortwährend zu Hause rechnen, und gab nur alle Tage an, was sie nun (etwa $-\frac{1}{2}$) statt m, was sie ferner statt A (etwa $\frac{2}{3}$a) und statt B (etwa $-\frac{3}{2}$b) setzen sollen; sah in der nächsten Stunde einzelne der Arbeiten durch, verbesserte sie (d. h. ließ sie verbessern) an der Tafel; und ließ sich dabei, z. B. bei der Berechnung eines einzigen Gliedes den ganzen Gang der Rechnung mit Angabe aller einzelnen Formeln und Sätze, die in Anwendung kommen müssen, dazwischen immer wieder vorlegen.

3) Der Lehrer forderte jedesmal vorzüglich die Arbeiten der ihm als faul oder nachläßig bekannten Schüler. Weil aber die übrigen dieses bald bemerken, und darauf ihre eigene Faulheit zu begründen versuchen, so wird der Lehrer bei den übrigen zuweilen wie der Blitz in's Haus fallen und es mit großer Strenge rügen, wenn er einen sonst fleißigen Schüler auf der bequemen Faulheit ertappt.

4) Es ist dem Lehrer Gesetz gewesen, keinen der Schüler zurückzulassen. Er hatte es daher immer vorzüglich nur mit den

schwächsten zu thun, und beschäftigte die übrigen durch Fragen nur so viel, als die dem Lehrer jedesmal sehr leicht sichtbare Unaufmerksamkeit es nöthig machte.

5) Um den Schüler dieser untersten mathematischen Abtheilung mehr Reitz zu machen, für die folgenden Klassen zu arbeiten, nahm der Lehrer gewöhnlich sehr früh, etwa in der 40sten Unterrichtsstunde einige leichte algebraische Gleichungen und ließ sie von den Schülern lösen, ohne sich dabei um eine Auflösungs-Methode zu bekümmern, den Schülern erlaubend, von dem Satze Gebrauch zu machen, daß auf beiden Seiten der Gleichung dasselbe vorgenommen, allemal wiederum zwei gleiche Ausdrücke geben muß. Um jedoch den Geist zu erfassen, in welchem dieses getrieben werden kann, wird man die Theorie der algebraischen (besser der Bestimmungs-) Gleichungen, wie solche im Lehrbuche entwickelt ist, vorher mit Sorgfalt nachlesen müssen.

6) In jeder der folgenden Klassen hat der Lehrer jedesmal zu Anfange eines jeden Semesters das wiederholen lassen, etwa 4 Wochen lang, was in dem vorhergehenden getrieben worden ist; dann ging er zu neuen Untersuchungen weiter, aber jedesmal in demselben Geiste, den Schüler selbstthätig eingreifen lassend, und besonders mit Sorgfalt den Schüler davon ausgehen lassend, daß er alles, was er brauche, in der untersten mathematischen Klasse bereits erlernt habe und hier nur anwenden dürfe.

7) Endlich hat der Lehrer auf nichts viel Zeit verwendet, was zur höheren mathematischen und geistigen Ausbildung nicht geeignet war; z. B. auf das numerische Ausziehen der Wurzeln, Anwendung der Logarithmentabellen u. s. w. — Die Logarithmen müssen ihrer selbst, aber nicht ihrer Anwendung wegen, behandelt werden, wenn die Behandlung in dem hier vorherrschenden Geiste und dem Zwecke des Gymnasial- oder Vorbereitungs-Unterrichts überhaupt, gemäß seyn soll.

Zweite Abtheilung.

Allererster geometrischer Unterricht.

Allererster geometrischer Unterricht. *)

§. 75. Allgemeine Regeln für diesen Theil des Unterrichts.

Auch bei diesem Unterrichte gehe man von der Ansicht aus, daß der Schüler weniger geometrische Sätze, als vielmehr geometrisches Denken erlernen solle, daß es daher weniger darauf ankomme, recht viele Sätze den Schüler so lange wiederholen zu lassen, bis er sie mit Fertigkeit herleiten (beweisen) kann, als vielmehr ihm einige wenige einfache und umfassende Sätze recht tüchtig eigen zu machen, und ihm dann die Kunst zu lehren, diese wenigen Sätze überall zur Auffindung neuer geometrischer Wahrheiten mit sicherem Erfolge anwenden zu können. Die wenigen Lehrsätze, welche der Schüler nicht bloß recht ordentlich und gründlich verstanden haben muß, sondern die er materiell auch wohl im Gedächtniß zu behalten hat und auf welche allein

*) Da der geometrische Unterricht nicht von so delikater Natur ist, als der calculative (arithmetische, algebraische, analytische) so können wir uns hier kürzer fassen, und mehr den allerersten Unterricht betrachten und bloß in der Absicht, damit auch der folgende Vortrag in demselben Geiste gegeben werden möge. — Wenn wir ferner weiter oben bemerkten, daß die Schüler, welche so eben von Quarta nach Tertia versetzt werden, für den beginnenden mathematischen Unterricht die geeignetsten sind, so möchten wir es doch gerne sehen, wenn gerade diesem allerersten Unterricht in der Geometrie, bis zur Congruenz der Dreiecke, wöchentlich 2 Stunden schon in Quarta verwilligt werden könnten, damit in Tertia der Unterricht bereits tüchtig eingeleitet seyn und sogleich mit der Congruenz der Dreiecke beginnen möge.

er bei allen seinen geometrischen Untersuchungen zurückgeführt werden muß, sind in unserem Lehrbuche *) unter dem Namen der Hauptsätze besonders hervorgehoben, so daß sie hier nicht weiter angedeutet zu werden brauchen. Das consequente geometrische Denken erlernt dagegen der Schüler am besten bei den allereinfachsten Sätzen, die der Congruenz der Dreiecke noch vorangehen, und sie sind es daher, die vorzüglich in dieser Absicht vorgenommen und dem Zwecke des Unterrichts gemäß durchgeführt werden müssen; wie solches die nächsten Paragraphen näher andeuten.

Auch hier wird vor Allem der Schüler darauf aufmerksam gemacht, daß die Geometrie ganz von vorne anfange, daß also nichts, auch gar nichts, vorausgesetzt werde, daß er aber eben deshalb auch nichts herein bringen dürfe, als was hier in diesem Unterrichte vorher schon als wahr erkannt worden ist. Dann mag der Unterricht ohngefähr, wie folgt beginnen, ohne daß man vorher sich auf Definitionen, Eintheilung oder sonst etwas allgemeines eingelassen hätte.

§. 76. Veranschaulichung des Begriffes der Linie.

L. Stellt euch einen Stock vor, z. B. diesen Spazierstock. Könnt ihr euch selbigen noch dünner denken? Sch. O ja. L. Nun und wenn ihr ihn euch dünner gedacht habt; könnt ihr ihn euch nicht noch dünner denken? Sch. So dünn, als wir wollen. L. Könnt ihr ihn aber euch so dünn denken, daß er gar nicht mehr dick (oder breit) ist? Sch. Dann bleibt ja nichts mehr. L. Da habt ihr recht; ein Stock bleibt nicht mehr. Aber wenn ich euch noch einen zweiten Stock in die Hand gebe und ihr sollt mir sagen, welcher von beiden länger ist, welcher kürzer, werdet ihr auf die Breite oder Dicke desselben sehen? Sch. Nein, bloß auf die Länge. L. Ihr könnt euch also bei dem Stock bloß die Länge allein denken? Sch. Ja. L. Nun seht,

*) Reine Elementar-Mathematik. II. Band. Berlin 1826.

die Länge allein bleibt übrig, wenn ihr euch den Stock immer dünner und dünner denkt, so daß er zuletzt gar keine Dicke oder Breite mehr hat. Diese Länge allein nennt man Linie; und es gibt gerade und krumme Linien.

L. Hier mache ich nun mit der Kreide an diese Tafel einen langen Strich (gerade oder krumm); ist das nun eine Linie? Sch. Ja. L. Haltet ein wenig ein, das wollen wir doch erst ordentlich untersuchen. Ist das, was ihr hier an der Tafel sehet und für eine Linie haltet, nicht, was von der Kreide an der Tafel haften geblieben ist? Sch. Ja. L. Es sind also lauter Kreide-Theilchen, welche in diesem Strich neben einander liegen. Hat nicht jedes derselben eine Länge, eine Breite und auch eine Dicke? Sch. Ja, die Dicke ist aber sehr gering. L. Länge, Breite und Dicke werden bei einem solchen Kreideståubchen einander nicht viel nachgeben. Und dann ist die Dicke doch noch vorhanden, wenn auch sehr gering. Hat also dieser Strich nicht noch Breite und Dicke? Sch. Ja. L. Ist dieser Strich eine Linie? Sch. Nein, weil er nicht bloß Länge hat. L. Ganz richtig. Weil aber seine Länge sehr bedeutend ist, seine Breite und Dicke sehr geringe, so könnt ihr euch bequem desselben bedienen, um eine Linie dadurch vorzustellen, wenn er auch selber keine Linie ist. In der Folge werden wir ihn daher noch oft für eine Linie ansehen; nur müssen wir uns dann seine Breite und Dicke ganz wegdenken.

§. 77. Veranschaulichung des Begriffes Punkt.

L. Kannst du dir denken, daß eine Linie irgendwo anfängt, oder irgend wo aufhört? Sch. Ja. L. Nun wo eine Linie anfängt oder wo sie aufhört, den Ort meine ich, nennen wir Punkt. Da eine Linie keine Breite und keine Dicke hat; kann ein Punkt, d. h. ein Ort, wo die Linie anfängt oder aufhört, Breite oder Dicke haben? Sch. Nein. L. Kann aber ein Punkt Länge haben? Sch. Dann wäre er ja selber eine Linie. L. Sehr richtig; ein Punkt kann also weder Länge, noch Breite,

noch Dicke haben, sondern er ist der bloße Ort, wo eine Länge (oder auch Breite und Dicke) anfängt oder aufhört. Aber ich hörte euch selbst schon sagen, das ist ein dicker Punkt, nehmlich bei dem Schreiben, oder wenn ein solches Punktum in Büchern vorkommt; also hat doch wohl der Punkt eine Dicke? Sch. Ja, das Punktum; das ist aber kein solcher Punkt, wie wir ihn uns hier denken sollen; das sind wieder bloß Tintetheilchen. L. Sehr richtig. Man kann aber durch ein solches Tippelchen (Tüttelchen) einen Punkt vorstellen, d. h. einen Ort bezeichnen, wenn wir uns nur seine Länge, seine Breite und seine Dicke wegdenken.

Könnt ihr euch denn einen Punkt denken, wo ihr nur immer wollt; z. B. auch irgend wo in einer Linie? Sch. Ja. L. Allerdings könnt ihr euch den Anfang einer Linie denken, wo ihr nur immer wollt; eben so das Aufhören.

§. 78. Bestimmung einer geraden Linie durch 2 Punkte.

L. Wie viel gerade Linien könnt ihr euch durch einen gegebenen Punkt hindurch denken? Sch. So viel wir wollen. L. Wenn ich euch aber noch einen zweiten Punkt gebe, wieviel gerade Linien könnt ihr euch denken, von dem einen Punkt nach dem andern? Sch. Nur eine einzige. L. Warum nur eine einzige? Sch. weis es nicht. L. Ich weis es selbst nicht so recht, warum; doch können sich alle Menschen, die ich darüber gesprochen habe, dies nicht anders denken; also muß es wohl in uns liegen, und wahr seyn, wenn wir auch nicht sagen können, warum. — Wir nehmen also an, weil wir alle uns das nicht anders denken können, daß durch zwei Punkte nur eine einzige gerade Linie durchgeht, und auch allemal eine durchgelegt gedacht werden kann. Krumme Linien kann man durch zwei Punkte sich denken, so viel als man will.

§. 79. Erklärung des Begriffes der Gleichheit der Linien und der Ungleichheit derselben, d. h. des Größern und Kleinern.

L. Wenn ich euch zwei Liniale gebe, und ihr sollt mir sagen, ob beide gleich lang sind, wie werdet ihr das untersuchen? Sch. Wir werden sie an einander halten. L. So etwa? (er legt sie dabei mit ihren Kanten blindlings, wie (Fig. 1.) zu sehen, an einander) Sch. Nein so nicht. L. Wie denn? Sch. So (er legt sie (wie Fig. 2.) an einander). L. Also so; das sehe ich nun wohl; wenn ihr es mir nur auch beschreiben könntet. Wie legt ihr sie? Sch. Daß die Enden an einander liegen. L. Liegen denn hier die Enden an einander? von dem einen Paar Enden sehe ich es, aber das andere Paar Enden, das scheint mir nicht an einander zu liegen. Sch. Die liegen auch nicht an einander, weil die Liniale nicht gleich lang sind. L. Wie legt ihr also, um noch einmal von vorne anzufangen, die Liniale an einander? Sch. Daß ein Paar Enden an einander liegen. L. Gut; und woran seht ihr nun, daß die Liniale gleich lang sind? Sch. Wenn auch die beiden andern Enden zusammenfallen. L. Und woran erkennt ihr, daß die Liniale nicht gleich lang sind, d. h. ungleich lang sind? Sch. Wenn die beiden andern Enden nicht zusammenfallen. L. Welches erkennt ihr denn als das längere? Sch. Dessen Ende über das andere Linial noch hinausliegt. L. Indem ihr nun von dem Linial bloß die Längen allein betrachtet, was habt ihr eigentlich betrachtet? Sch. Linien. L. Richtig, die Linien, welche durch die Kanten der Liniale vorgestellt sind. Wenn man nun sagt, die Liniale sind gleich lang; d. h. die Längen der Liniale sind gleich, so muß man besser sagen: die Linien sind gleich. Da ferner das Ende der Linie allemal ein Punkt ist, so wird solcher besser der Endpunkt genannt. Woran werdet ihr also erkennen, daß zwei Linien einander gleich sind? Sch. Wir werden sie mit ihrem einen Paar Endpunkte auf einander legen; wenn dann auch ihr anderes Paar Endpunkte zusammenfällt, so sind sie ein-

ander gleich; und wenn das andere Paar Endpunkte nicht auf einander fällt, so sind die Linien ungleich; und zwar ist diejenige die Größere (die andere dann die Kleinere) deren zweiter Endpunkt über die andere Linie hinausfällt. L. Sehr richtig, nur müßt ihr euch noch einige Bemerkungen gefallen lassen; einmal, daß ihr das bloß so nennt, und eben so gut hättet anders nennen können; *) zweitens, daß wir das von nun an immer so nennen wollen, und drittens, daß ihr die Linien eigentlich nicht legt, denn ihr kennt sie nicht so mit Händen fassen, weil sie gar keine Dicke und Breite haben, sondern sie nur gelegt denkt; das letztere merkt euch besonders wohl.

Ihr versteht also unter gleichen Linien von nun an zwei solche, wie AB und CD **) (Fig. 3.), die mit ihren beiden Endpunkten zusammenfallen können und müssen, sobald man sie gehörig auf einander gelegt denkt. Und unter ungleichen (größeren und kleineren) Linien denkt ihr euch solche, wie EF und GH (Fig. 4.), welche nicht mit ihren beiden Endpunkten zusammenfallen können, auch wenn man ihren einen Endpunkt etwa E und G, und die Linien selbst aufeinander gelegt denkt.

§. 80. Erster Lehrsatz der Summen und Differenzen der geraden Linien.

Hier habe ich gerade Linien (Fig. 5.) AB und CD, die erstere ist in dem Punkte E, die andere in dem Punkte F ge-

---

*) Man kann dies noch dadurch eindringlicher machen, daß man fragt, warum die Liniale ungleich sind, wenn sie so liegen können, wie (Fig. 2.) zu sehen; warum dann das obere kleiner ist, als das untere, oder das untere größer wie das obere? — Da der Schüler keinen Grund angeben kann, so kann nun viel anschaulicher gemacht werden, daß man diesen Zustand der Linien gerade so nennt, d. h. daß man sich gerade dieser Worte bedient, um diesen Zustand der Linien zu bezeichnen; d. h. daß es kein Lehrsatz sondern Definition ist.

**) Es ist aber sehr zu rathen, wenn von der Linie AB gesprochen wird, den Schüler zu fragen, was er sich unter A und unter B denkt, und ihn

theilt. Sind nun die Linien AB und CD einander gleich? Sch. Ja. L. Warum denn? Sch. Weil sie mit ihren Endpunkten auf einander fallen. L. Woher wißt ihr denn das? Sch. — L. Nicht wahr, weil es euch so geschienen hat; weil es so aussieht. Aber nach dem Aussehen dürft ihr nicht gehen; denn erstlich sind ja, was ihr da (Fig. 5.) sehet, nicht eigentlich Linien, sondern Striche, die bloß Linien vorstellen sollen; und dann habe ich euch die Linien gegeben, und konnte sie also geben, (d. h. mir denken, und verlangen daß auch ihr sie gerade so denkt) wie ich nur immer wollte. Also noch einmal, sind die Linien AB und CD einander gleich? Sch. Das können wir nicht wissen. L. Sind aber die Linien AE und CF einander gleich (Fig. 5.)? Sch. Das können wir auch nicht wissen. L. Sehr richtig. Aber vielleicht sind EB und FD einander gleich? Sch. Auch das wissen wir nicht. L. Gut. Aber wenn wir uns die Stücken AE und CF einander gleich denken, und eben so die Stücken EB und FD einander gleich gedacht sind; müssen dann die ganzen Linien AB und CD einander gleich seyn? Sch. Ja. L. Wenn ich es euch aber nicht so auf das Wort glaube, wie wollt ihr mich überzeugen, so daß ich gar nicht anders mehr kann und es zugeben muß? Ein Schüler. Wenn die Stücke gleich sind, so sind auch die Ganzen gleich. Ein Anderer. Gleiches zu Gleichem addirt, gibt gleiches. L. Der eine und der andere hat dasselbe gesagt, nur jeder mit andern Worten; aber gerade das ist's, was ich nicht glauben will. Ihr habt mir keinen neuen Grund angegeben, sondern nur das mit andern Worten mir wiederholt, was ich gerade nicht zugeben will, weil ich noch nicht so recht davon überzeugt bin. — Ihr wißt das nicht! — Wenn ihr es so machtet und mich fragtet: Wovon wollen sie denn eigentlich überzeugt seyn? Ich antworte: daß

---

bemerklich machen zu lassen, daß hier unter A der neben dem Buchstaben A befindliche Endpunkt, unter B aber der andere Endpunkt verstanden werde, und daß man dann unter AB die zwischen diesen Punkten A und B liegende gerade Linie verstehe.

AB und CD einander gleich sind, wenn die Stücke AE und CF, desgleichen EB und FD einander gleich gedacht (genommen) sind. Ihr. Wann halten sie denn die Linien für gleiche? Ich. Wenn sie mit ihren beiden Endpunkten auf einander fallen können und müssen, sobald sie gehörig auf einander gelegt gedacht werden. Ihr. Nun so wollen wir sie einmal auf einander gelegt denken, und zwar zuerst C auf A, so muß E auf F fallen. Ich. Halt, warum? Ihr. Weil wir die Linien AE und CF als gleiche angenommen haben, d. h. als solche, die mit ihrem zweiten Endpunkte auf einander fallen müssen, wenn man sie mit ihrem ersten auf einander gelegt denkt. Ich. Das ist wahr. Ihr fahrt fort: Und weil nun F auf E fallen muß, so fällt auch nothwendig D auf B. Ich. Warum? Ihr. Weil auch die Stücke EB und FD einander gleich genommen (gedacht) worden sind. Ich. Das ist auch richtig. Ihr. Nun, da sie zugegeben haben, daß zu gleicher Zeit die Endpunkte C und A und auch D und B der Linien AB und CD auf einander liegen, so können sie auch nicht mehr läugnen, daß die Linien AB und CD einander gleich sind. Ich. Nein, nun nicht mehr; nun muß ich es zugeben, weil ich solche gerade Linien, die ganz zusammenfallen, gleiche Linien nenne.

Der Lehrer stellt nun den Satz in der gehörigen Form als Lehrsatz hin, nehmlich: wenn $AE = CF$ und $BE = DF$ ist, so muß auch $AB = CD$ seyn; und läßt denselben, so wie eben gezeigt worden, von mehren der Schüler noch wiederholt beweisen, und zwar bei immer veränderter Lage der Linien und veränderten Buchstaben, wie solches z. B. (Figg. 6. 7. 8. 9. 10.) zu sehen ist; wobei der Schüler alle mögliche Paar Punkte zuerst auf einander gelegt sich denken mag, wie er gerade Lust hat. Denkt er sich unschickliche zuerst auf einander gelegt, so sieht er schon von selbst, daß ihm nun der Beweis nicht gelingt; und gelingt ihm der Beweis, so sieht er, daß es hier nur auf ein richtiges Schließen ankommt, nicht aber auf ängstliche Beobachtung einer zufälligen Form.

§. 81. Erste Anwendung des vorstehenden Lehrsatzes.

Ich zeichne nun hier eine Linie AD (Fig. 11.) hin, und denke mir zwei beliebige Punkte B und C in ihr. Ist nun AB = CD? Sch. Ich weis es nicht. L. Gut, du kannst das auch nicht wissen, denn es hängt davon ab, wie ich mir diese Punkte B und C noch denken will. Gesetzt aber ich hätte mir die Punkte B und C so gedacht, daß wirklich AB = CD ist; muß wohl dann auch AC = BD seyn? Sch. Ja. L. Wie willst du das beweisen? d. h. wie willst du mich davon überzeugen? Sch. Ich lege die beiden Linien AC und DB so auf einander, daß der Punkt D von DB auf A von AC fällt, so muß, weil DC = AB ist, der Punkt C von DCB auf den Punkt B von ABC fallen. L. Ganz richtig. Sch. Und weil auch noch das andere Stück CB von DB dem zweiten Stück BC von AC gleich ist, so muß wieder der Punkt B von DB auf den Punkt C von AC fallen. Also liegen beide Endpunkte von DB und AC auf einander, nehmlich D auf A, und B auf C; mithin sind DB und AC einander gleich. *)

L. Das ist sehr gut gewesen. Ich bin nun völlig überzeugt. Ich will dir aber zeigen, wie du dir das hättest bequemer machen können. Du durftest nur so sagen: So oft von zwei Linien jede aus zwei Stücken besteht, die beziehlich einander gleich sind, so oft müssen die ganzen Linien auch einander gleich seyn, wie diese Linien auch gegeneinander liegen mögen; denn das habe ich ein für allemal erwiesen, und kann es jedesmal (durch Aufeinanderlegen) auf's neue beweisen. Hier (Fig. 11.) habe ich nun zwei Linien AC und DB, die aus solchen gleichen Stücken (AB = DC und BC = CB) bestehen. Also

---

*) Wir haben schon öfter bemerkt, wie der Schüler, besonders anfänglich, nie zusammenhängend so bündige Antworten liefern wird, und wie die hier dem Schüler in den Mund gelegten Antworten, ihm nach und nach nur, bis zu dieser Bestimmtheit abgefragt werden müssen.

sind auch dasmal diese ganzen Linien AC und DB einander gleich. *)

§. 82. Noch mehre Anwendungen dieses ersten Lehrsatzes.

Der Lehrer wird nun diesen ersten Lehrsatz auf noch mehre andere Sätze anwenden lassen, etwa auf folgende:

1) Wenn (Fig. 12.) AB in C halbirt ist, und AE = BF, so ist auch EF in C halbirt;
2) Wenn (Fig. 13.) AB = FG und BC = GH und CD = EF ist, so ist auch AD = EH;
3) Wenn (Fig. 14.) AE das 6fache ist von AG, und CF das 6fache von CH, und noch AG = CH ist, so ist auch AE = CF. Und wenn AB das 10fache ist von AG und CD das 10fache von CH, so ist auch noch AB = CD. — Ueberhaupt ist n.AG = n.CH, so oft AG = CH;

und dergl. mehr; und es wird der Schüler darauf hingeleitet, solche Sätze durch Anwendung des ersten Lehrsatzes (§. 80.), dann aber auch, wo sich das thun läßt, ohne diesen Lehrsatz vorauszusetzen, direkt durch Aufeinanderlegen abzuleiten, d. h. indem man sich die Linien gehörig auf einander gelegt denkt, und zusieht, wie die einzelnen Punkte fallen.

Was Hälfte und halbirt ist, muß hier gelegentlich mit entwickelt werden; so wie überhaupt darauf zu sehen ist, daß

---

*) Der Lehrer wird hier die Gelegenheit wahrnehmen, anschaulich zu machen, wie es bequemer ist, solche Wahrheiten, die man im Verlaufe des Unterrichts einmal erkannt hat, wiederum zu benützen, um sie, so oft Gelegenheit dazu vorhanden ist, anzuwenden; als wenn man jedesmal auf das allererste (hier auf das Aufeinanderlegen) zurückgehen wollte. — Ferner wird der Lehrer den hier angewandten Satz so aussprechen lassen: „zwei Summen von Linien sind einander gleich, wenn sie einzelne gleiche Summanden haben" zu welchem Behufe vorher dem Schüler gesagt wird, daß man eine Linie, in so ferne sie aus Stücken besteht, eine Summe dieser Stücke nennt, während die Stücke selber die Summanden heißen.

mit jedem Worte ein durchaus bestimmter Begriff verbunden werde.

§. 83. Zweiter Lehrsatz der Summen und Differenzen der geraden Linien.

L. Wenn wir aber (Fig. 5.) annehmen, daß AE > CF, dagegen EB = FD ist; was werdet ihr nun von den ganzen Linien AB und CD sagen können? Sch. Es ist AB jetzt größer als CD. L. Wie willst du mir das beweisen? Sch. Ich lege die Linien wieder auf einander. L. Gut; zeige mir aber doch, wie du das anfangen willst. Sch. Ich lege zuerst C auf A und die Richtungen selbst auf einander. L. Nun was wird daraus folgern? Sch. Daß der Punkt F links von E fällt. L. Sehr richtig, warum aber? Sch. Weil wir uns CF < AE gedacht haben. L. Nun wie weiter? Sch. Nun muß auch D links von B fallen. L. Warum? Sch. weil FD = EB ist und F schon links von E ligt. L. Das scheint gerade nicht unrichtig zu seyn; doch erinnere ich mich nicht, daß wir so etwas schon gehabt hätten; und wir dürfen nur auf das bauen, was wir schon hier gehabt haben. Also, ich gebe nicht zu, daß D links von B fällt. Sch. Ja, dann muß ich ganz anders anfangen. Dann lege ich zuerst D auf B, so muß F auf E fallen, und dann C rechts von A; also ligt, während D auf B ligt, C rechts von A; mithin ist AB > CD. L. Sehr richtig. Du konntest auch damit anfangen, daß du zuerst die Punkte E und F auf einander gelegt dachtest und dann die Lage der übrigen Punkte nachwiesest.

§. 84. Anwendungen dieses zweiten Lehrsatzes.

Der Lehrer läßt diesen vorstehenden Satz ebenfalls von mehren Schülern wiederholt beweisen, die Lage der Linien beständig ändernd, auch die Buchstaben, wie solches (Figg. 6 — 10.) in Bezug auf den ersten Lehrsatz geschehen ist. Hernach, wenn der Lehrsatz selbst auch noch in seiner gehörigen Form ausgesprochen

worden ist (die Wörter Summe und Summand zu Hilfe nehmend), läßt man wieder Anwendungen machen desselben Lehrsatzes auf beliebige Sätze, ohngefähr folgende:

1) Wenn (Fig. 11.) AB > CD, so ist auch AC > BD;
2) Wenn (Fig. 12.) AB in C halbirt ist, und noch AE > BF, so ist auch CE > CF;
3) Wenn (Fig. 13.) AB = FG, BC = GH, und CD < EF ist, so ist auch AD < EH;

und dergleichen mehr; indem der Schüler abermals darauf aufmerksam gemacht wird, daß man diese Sätze unmittelbar durch Aufeinanderlegen erweisen könne, daß sie aber bequemer dadurch erwiesen werden, daß man überall den 2ten Lehrsatz bloß anwendet. — Diese verschiedene Beweise selber aufzufinden und zu geben, ist eine eben so belehrende und bildende als angenehme Beschäftigung, und es darf der Lehrer nur Abwechslung genug in die Sätze selber und auch in die verschiedene Lage der zu Hilfe genommenen Figuren bringen, um den Schüler auch noch durch die Sinne dahin zu bringen, das außerwesentliche von dem wesentlichen jedesmal gehörig abzusondern.

§. 85. Dritter Lehrsatz der Summen und Differenzen der Linien.

L. Wenn wir uns (Fig. 5.) AE > CF und BE > DF denken, was werdet ihr mir von den ganzen Linien AB und CD erzählen können? Sch. Es muß auch AB > CD seyn. L. Das scheint so. Jedoch müßt ihr es auf früher als wahr erkannte Sätze zurückführen, wenn ich wirklich davon überzeugt seyn soll. Sch. Ich werde die Linien wieder auf einander legen. — Er versucht es, legt zuerst C auf A und stößt auf die Schwierigkeit, welche bereits bei dem Beweise des 2ten Lehrsatzes (§. 83.) sich ergeben hat; — er versucht es noch einmal, denkt sich zuerst D auf B gelegt; findet dieselbe Schwierigkeit. Endlich denkt er sich zuerst E auf F gelegt, so fällt A links von C, B rechts von D, etwa wie solches (Fig. 15.) zu sehen; und aus dieser

Lage folgert er nun, daß AB > CD. — Es wird aber seine Consequenz im Schließen sehr fördern, wenn man ihm diesen letztern Schluß nicht zugibt, sondern ohngefähr so verfährt. L. Wenn C auf A läge, und D links von B, dann müßte ich zugeben, daß AB > CD; denn so haben wir früher das Größere und Kleinere erkannt. Aber es ligt ja nicht C auf A. Sch. Ich kann mir CD so weit nach der Linken zugerückt denken, daß C auf A fällt. L. Gut; was wirst du aber daraus folgern? Sch. Daß auch D weiter links rückt und also in jedem Falle links von B bleibt, daß also AB > CD ist. L. Das kann man fast zugeben. Allein hättest du jetzt, wo die Punkte die Lage (Fig. 15.) haben, nicht vielleicht so anfangen können? Es ist nach der jetzigen Lage der Punkte, gewiß AB > AD, und wiederum? Sch. AD > CD; also um so mehr AB > CD. L. Dasmal hast du dich durch meinen Anfang täuschen lassen. Es scheint zwar nicht unrichtig zu seyn; allein du hast hier einen Satz angewandt, den wir hier noch nicht gehabt haben, und dessen Richtigkeit also von uns nicht zugegeben werden darf, nehmlich den Satz:

§. 86. Neuer Lehrsatz.

Wenn eine Linie PQ (Fig. 16.) größer ist, als eine zweite RS, und die zweite RS wiederum größer als die dritte TU, so ist auch die erste PQ größer als TU. Diesen Satz mußt du vorher erst beweisen, ehe du ihn gebrauchen darfst. Wie wirst du das anfangen? Sch. Ich lege alle 3 Linien auf einander. — L. d. h. du denkst dir sie auf einander gelegt. — Sch. so daß T, R und P auf einander fallen, so fällt S links von Q, weil RS < PQ angenommen worden; und zugleich fällt U wiederum links von S, also um so mehr links von Q; folglich ist PQ > TU. L. Warum? Sch. Weil ich mich eben überzeugt habe, daß, während T auf P ligt, zugleich U links von Q liegen muß. L. Sehr gut.

§. 87. Fortsetzung des §. 85.

L. Um aber wieder auf den vorigen Satz zurückzukommen; wenn (Fig. 5.) die Linien AB und CD mit ihren Punkten E und F so aufeinander gelegt worden sind, daß die Punkte so liegen, wie solches (Fig. 15.) zu sehen ist, so muß, jetzt sehen wirs deutlich ein, $AB > CD$ seyn; denn es ist $AB > AD$ und $AD > CD$, also um so mehr $AB > CD$. — Hätten wir aber dasselbe nicht viel kürzer haben können? Sch. O ja; ein Theil ist ja immer kleiner, wie das Ganze. L. Halt! — Der Satz mag wahr seyn; aber er ist von uns hier noch nicht bewiesen worden, also nicht eher anzuwenden, als bis wir ihn erwiesen, d. h. auf die früher gehabten Sätze zurückgeführt haben. Wie willst du das anfangen, um zu beweisen, daß der Theil CD (Fig. 15.) der ganzen Linie AB kleiner ist, als diese ganze Linie AB? Sch. Ich werde CD und AB wiederum auf einander legen. L. Das geht wohl; aber vorhin haben wir das auch schon so gemacht, und dieses Verfahren wenigstens nicht elegant genug gefunden. Sch. Ich werde so schließen. Es ist $AB > AD$ und $AD > CD$, also nach dem eben erwiesenen Satze, um so mehr $AB > CD$.

L. Sehr Gut. Von nun an dürft ihr in der Folge, wenn von geraden Linien die Rede ist, diesen Satz gebrauchen, daß nehmlich der Theil kleiner ist, als das Ganze; eben weil wir ihn für solche Linien hier so eben erwiesen, d. h. als unbestreitbar wahr erkannt haben.

§. 88. Vierter Lehrsatz der Summen und Differenzen der Linien.

L. Wenn wir hier (Fig. 5.) annehmen, daß $AB = CD$ und noch $AE = CF$ ist, was könnt ihr nun folgern? Sch. Daß auch $BE = DF$ ist. L. Wie wollt ihr das beweisen? Sch. Wir denken uns die Linien auf einander gelegt, so daß C auf A fällt, so fällt auch E auf F. L. Warum? Sch. Weil $AE = CF$ ist. L. Richtig und weil unter gleichen

Linien gerade solche verstanden werden, welche mit ihren beiden Endpunkten zugleich auf einander fallen, wenn sie mit ihren ersten auf einander gelegt gedacht werden. Wie nun weiter? Sch. Es muß nun ferner der Punkt D auf B fallen. L. Warum? Sch. Weil EB = FD ist. L. Wie unachtsam! Haben wir uns die Linien so gedacht? Wie haben wir uns dasmal die Linien hier (Fig. 5.) gedacht? Sch. Daß AB = CD und AE = CF ist. L. Also, warum fällt D auf B? Sch. Weil AB = CD ist, und A auf C schon liegend gedacht wird. L. Gut. Was nun? Sch. Nun muß auch EB = DF seyn, weil ich mich eben überzeugt habe, daß sie mit ihren beiden Endpunkten zugleich auf einander liegen können. L. Gut. — Ein solches Stück EB, in so ferne man sich denkt, daß AE von AB abgeschnitten worden ist, heißt die Differenz zwischen AB und AE; und AB wird dann der Minuend und AE der Subtrahend dieser Differenz genannt; und das Stück Linie AE von AB abschneiden, wird auch subtrahiren der Linien genannt; und der Lehrsatz selbst kann dann so ausgesprochen werden: „Zwei Linien BE und DF sind einander gleich, wenn sie „Differenzen von gleichen Minuenden und gleichen Subtrahenden sind."

§. 89. Die übrigen Lehrsätze der Summen und Differenzen der geraden Linien.

Der Lehrer nimmt nun an, daß (Fig. 5.) AB > CD und AE = CF sey, und läßt beweisen, daß dann BE > DF seyn müsse.

Hernach wird angenommen, daß (Fig. 5.) AB = CD und AE > CF sey, und bewiesen, daß dann BE < DF seyn müsse.

Zuletzt wird angenommen, daß AB > CD und AE < CF sey, und gezeigt, daß dann wiederum BE > DF seyn werde.

Der Schüler wird diese Sätze erstlich durch auf einander-

legen, nachher aber auch einige derselben, aus den vorhergegangenen Lehrsätzen ableiten. *)

§. 90. Anwendungen der vorstehenden Sätze.

Von allen diesen Sätzen macht man nun Anwendungen, wie wir oben für die erstern bereits gezeigt haben, und wie namentlich noch mehre in der ohngefähr 9 Bogen starken Elementar-Geometrie und Trigonometrie Berlin 1819 (§. §. 11 — 16.) zu finden sind. Ueberall ist es dem Lehrer nicht um die Sätze selber zu thun, sondern nur darum, daß der Schüler sich eine Consequenz im Denken aneigne, und eine Fertigkeit im Anwenden allgemeiner Sätze auf einzelne Fälle, wie solches ihm unentbehrlich ist, wenn er später irgend wo oder irgend wann selbstthätig einzuschreiten und für gegebene Fälle selbst die, diesen entsprechenden Resultate zu entwickeln hat.

§. 91. Noch mehr Anwendungen und Uebungen.

Namentlich stelle man auch noch folgende Uebungen an: L. Wenn von zwei Linien AB und CD (Fig. 5.) die erstere in E die andere in F halbirt ist, sind dann die Hälften dieser Linien einander gleich? Sch. Ja. L. Du meinst, es ist AE = BE und auch CF = DF, und da hast du recht. Aber ich frage, ob die Hälfte von AB, d. h. AE gleich seyn wird der Hälfte von CD, nehmlich CF? Sch. Wir können das nicht wissen. L. Aber wenn ich mir AB = CD denke, sind dann die Hälften AE und CF einander gleich? Sch. Ja, dann. L. Wie willst du das beweisen? ich meine, wie willst du mich davon überzeugen? Sch. Wenn die Ganzen gleich sind, so sind auch

---

*) Bei dem Lehrsatze (§. 88.) kann z. B. von dem einen Summanden (Fig. 5.) EB ein Stück EG abgeschnitten werden = FD, so ist sogleich nach (§. 86.) AG > CD und AB > AG, also auch AB > CD. — Bei dem letzten Satze hier oben kann man eben so AG = CD machen, und hat dann, weil AG = CD und AE < CF ist, EG > DF; aber EB > EG also auch EB > DF.

die Hälften gleich. L. Gerade das glaube ich nicht; gerade das sollst du hier für Linien erweisen. — Sch. Ich betrachte AE und CF als Differenzen; von AE ist der Minuend AB und BE der Subtrahend; von CF ist der Minuend CD und DF der Subtrahend. L. Das hast du ganz gut und so angefangen, wie dir das bei den vorhergehenden Anwendungen gelehrt worden ist. Zwei Linien sind vielleicht einander gleich, weil sie Summen sind von gleichen Summanden; vielleicht aber auch, weil sie Differenzen sind von gleichen Minuenden und gleichen Subtrahenden. Wie wirst du aber jetzt weiter fortfahren? Sch. Es sind nun die Minuenden AB und CD einander gleich, und auch die Subtrahenden einander gleich, also — L. Halt! warum sind die Subtrahenden BE und DF einander gleich? Sch. Weil sie die Hälften sind der gleichen ganzen Linien AB und CD. L. Wie schlecht! gerade das wollen wir erst untersuchen, ob solches nehmlich aus den bisher gehabten Sätzen sich ableiten läßt. Kannst du wissen, daß die Subtrahenden BE und DF einander gleich sind? Sch. Nein. L. Nun so geht's auch nicht auf diesem Wege. Ich glaube zuletzt, daß unser Satz nicht einmal wirklich wahr ist. Es werden die Hälften nicht allemal einander gleich seyn müssen, wenn auch die ganzen Linien einander gleich sind. Meinst du nicht auch so? Sch. Wenn die Hälfte der einen Linie größer wäre, da wäre ja doch auch die ganze Linie größer. L. Wie meinst du das; beschreibe mir das näher an der Figur. Sch. Wenn $AE > CF$ wäre, so wäre auch $BE > DF$. L. Warum? Sch. weil $AE = BE$ und $CF = DF$ ist, nach der Voraussetzung, daß AB und CD in E und in F halbirt seyn sollen. L. Gut. Nun wie weiter? Sch. Und dann wäre auch $AB > CD$ als Summen, wo die einzelnen Summanden der einen größer sind, als beziehlich die der andern. L. Sieh! Da hast du ja auf einmal einen recht überzeugenden Beweis gefunden. Es kann nicht $AE > CF$ seyn, weil sonst nach dem 3ten Lehrsatz der Summe und Differenzen auch $AB > CD$ wäre; und es kann auch nicht $AE < CF$

seyn, weil dann aus demselben Grunde auch AB < CD wäre; also muß AE = CF seyn; weil ein vierter Fall nicht möglich ist.

§. 92. Immer noch mehr Anwendungen.

L. Nun frage ich aber, wenn (Fig. 5.) AB > CD gedacht ist, übrigens AB und CD in E und in F halbirt sind, muß dann auch die Hälfte AE von AB größer seyn als die Hälfte CF von CD? Sch. Ja. Denn wäre AE = CF, so wäre auch BE = DF und dann auch AB = CD. Und wäre AE < CF, so wäre auch BE < DF, also auch AB < CD. Also kann nicht AE gleich seyn der Hälfte CF, auch nicht kleiner als sie; mithin muß AE > CF seyn.

L. Gut. Uebrigens merkt euch noch: In diesen beiden Sätzen habt ihr eigentlich nicht bewiesen, daß die Sätze selbst gelten, sondern bloß daß das Gegentheil derselben nicht gilt. Ihr könnt das in der Folge noch öfter so versuchen, und solche Beweise werden **indirekte** Beweise genannt und sind sehr überzeugend, wenn sie nur richtig geführt werden.

Glaubt man übrigens, daß der Schüler in diesen Sätzen hinlänglich geübt sey (etwa nach 9 — 10 Unterrichtsstunden) so gehe man sogleich zur Planimetrie und zwar zu der Lehre der Winkel über.

§. 93. Veranschaulichung der Begriffe Fläche und Ebene.

L. Wenn ihr zwei Bogen Papier mit einander vergleicht, ob man auf den einen mehr schreiben kann, als auf den andern, seht ihr dabei auf die Dicke des Papiers? Sch. Nein; man kann ja nicht mehr darauf schreiben, ob das Papier sehr dicke oder dünne ist. L. Ihr habt also bloß die Länge und Breite im Auge? Sch. Ja. L. Nun seht, wenn ihr bloß die Länge und Breite betrachtet, so habt ihr eine **Fläche**, denn so nennt man das Ding, was bloß Länge und Breite hat. Und könnt ihr euch in dieser Fläche überall hin lauter gerade Linien denken,

so nennt man diese Fläche eine **ebene Fläche** oder eine **Ebene**. — Eine solche Ebene soll hier unsre schwarze Tafel vorstellen, wenn wir dabei nicht auf die Dicke derselben sehen.

§. 94. Entwicklung des Begriffes Winkel.

L. Nun denkt euch einmal in dieser Ebene der Tafel einen Punkt A, und von diesem Punkt A aus drei gerade Linien AB, AC, AD (Fig. 17.), so haben diese Linien so oft ihr sie euch denkt, allemal eine feste und bestimmte Lage zu einander, wenn auch allemal eine andere. Wird nun diese Lage der Linien gegen einander anders, wenn ihr euch die Linien selbst länger oder kürzer denkt? Sch. Nein, denn ich verrücke ja die Linie von A aus nicht, wenn ich mir sie auch länger oder kürzer denke. L. Gut. Wir wollen uns daher diese Linien ganz beliebig lang und am allerbesten, bis in's Unendliche verlängert denken, so bleibt die Lage der Linien gegen einander doch noch unverrückt. Aber sagt mir nun, wenn die größere oder geringere Länge der Linien an ihrer Lage nichts ändert, was werde ich denn vermehren oder vermindern müssen, wenn die Lage der Linien selbst dadurch geändert werden soll? Sch. Ich muß die eine Linie um den Punkt A gedreht denken. L. Das ist nicht unrichtig; aber keine Antwort auf meine Frage. Ich fragte ja nicht, was **gedreht** werden soll, sondern was zu **vermehren** oder zu **vermindern** ist, wenn die Linien eine andere Lage gegen einander bekommen sollen? Sch. Die **Neigung** der Linien gegen einander muß vermehrt oder vermindert gedacht werden, wenn die Lage der Linien gegen einander geändert werden soll. L. Das ist auch nicht unrichtig; aber hier in der Geometrie haben wir es mit Punkten, Linien und Flächen zu thun, und wir müssen daher die Lage der Linien z. B. AB, AC gegen einander durch eine Linie oder Fläche bestimmen, die nachher, so oft sie vermehrt oder vermindert gedacht wird, eine andere Lage der Linien AB, AC gegen einander hervorbringt. Deshalb nehmen wir am besten die, zwischen diesen Linien liegende Ebene; aber wie weit,

bis zur Linie BE, oder bis zur andern CF, oder weiter noch oder weniger weit? Sch. — L. Wenn von der Linie AB ein noch so kleines Stück gegeben ist, ist dadurch die ganze Linie bis in's Unendliche gegeben? Sch. Ja. L. Dasselbe gilt von AC. Wenn also von der zwischen AB und AC liegenden Ebene ein noch so kleines Stück (welches aber zwischen diesen Linien liegt) gegeben ist, so ist dadurch dieselbe Ebene bis in's Unendliche gegeben. Weil nun gar kein Grund vorhanden ist, der uns anrathen sollte, die Ebene zwischen AB und AC bloß bis zur Linie BE, die selber willkührlich ligt, oder bis zu CF, von der dasselbe gilt, zu nehmen, so ist es am natürlichsten, ja (später werdet ihr das einsehen) sogar nothwendig, diese Ebene zwischen AC und AB bis in's Unendliche genommen sich zu denken, und diese zur Bestimmung der Lage der Linien AB und AC gegen einander zu nehmen. Wie könnt ihr euch diese unendliche Ebene zwischen AC und AB vermehrt oder vermindert denken? Sch. Dadurch daß AC um A sich von AB weg oder nach AB hin dreht. L. Wodurch noch? Sch. Daß AB sich um A herumdreht, von AC ab, oder nach AC hin. L. Wodurch noch? Sch. — L. Könnt ihr euch nicht noch diese Ebene dadurch vermindert denken, daß ihr AB und AC unverrückt läßt, und bloß im Unendlichen ein Stück weggenommen. Sch. Ja, auch so noch. L. Ich aber sage nein, eben weil ihr euch jedesmal die Ebene bis in's Unendliche verlängert denken sollt; im Unendlichen ist keine Vermehrung und keine Verminderung denkbar, sondern nur da, wo eine Grenze ist, kann von einer Vermehrung oder Verminderung die Rede seyn, und diese selbst wird wiederum nur dadurch denkbar, daß man eben diese vorhandene Grenze hin und her gerückt sich denkt. Also noch einmal: Wodurch bestimmen wir am besten und der Geometrie entsprechend, die Lage der Linien AB und AC gegen einander? Sch. Durch die dazwischen liegende Ebene, die wir uns mit den geraden Linien AB und AC zugleich bis in's Unendliche denken. L. Gut. Diese Ebene nennen

wir Winkel, die Linien AB und AC seine Schenkel, wenn sie nehmlich von A aus bis in's Unendliche gedacht werden, und der Punkt A selbst heißt die Spitze oder der Scheitel des Winkels. L. Wieviel Endpunkte hat also ein Schenkel z. B. AB eines Winkels? Sch. Zwei. L. So; wo ligt denn der erste? Sch. In A. L. Gut; und wo der andere? Sch. In B. L. Hört denn der Schenkel in B auf? Sch. Nein, er geht in's Unendliche fort. L. Ist also in B das Ende des Schenkels? Sch. Nein. L. Also ist B kein Endpunkt des Schenkels. Wo ligt dann nun der zweite Endpunkt des Schenkels AB? Sch. Es ist keiner vorhanden, weil der Schenkel ohne Aufhören fortgeht. L. Siehst du! die Schenkel eines Winkels haben alle, ohne Ausnahme, nur einen einzigen Endpunkt (den man auch Anfangspunkt nennen kann) und der ist die Spitze oder der Scheitelpunkt des Winkels.

§. 95. Entwicklung der Begriffe der Gleichheit und der Ungleichheit der Winkel, des größern und kleinern Winkels.

L. Wenn ich mir nun zwei Winkel denke, etwa (Fig. 18.) CAB und PMN, woran wirst du erkennen, daß diese beiden Winkel einander gleich oder einander ungleich sind? Sch. Ich werde sie auf einander gelegt denken. L. Sehr gut, aber wie? Sch. Ich werde zuerst MN auf AB legen, und dann MP auf AC. L. Darfst und kannst du denn das? Hat nicht PM gegen MN eine bestimmte, von mir gegebene Lage? darfst du nun diese Lage dadurch ändern, daß du dir MN an einem bestimmten Orte denkst, nehmlich in AB, und hernach doch noch MP so lange hin und herdrehen lassen willst, daß diese MP nun auch noch auf AC fällt? Darfst und kannst du das? Sch. Nein. Ich darf bloß MN auf AB gelegt denken. L: Gut. Wenn nun MP auf AC fällt? Sch. Dann sind die beiden Winkel einander gleich. L. d. h. du denkst dir unter gleichen Winkeln solche, die so mit ihren beiden Schenkeln auf einander

fallen. Aber wenn nun MN nicht auf AC fällt, sondern wenn die Winkel etwa so fallen, wie hier (Fig. 19.) zu sehen, dann sind die Winkel nicht einander gleich? Sch. Die Winkel können nicht so fallen, denn es ligt ja M in A. L. Du magst dir das wohl so gedacht haben; aber gesagt hast du noch nichts davon, daß M in A liegt. Du mußt also so sagen: Ich denke mir die Schenkel MN und AB so auf einander gelegt, daß M auf A zu liegen kommt und die (Flächen der) Winkel auf einander fallen. Wenn nun auch MP auf AC fällt, so nennen wir die Winkel, gleiche Winkel. Fällt aber nicht MP auf AC, sondern etwa links in AD (Fig. 17.) so sagen wir: die Winkel seyen ungleich und nennen den den größern also dasmal PMN (den andern CAB dann den kleinern), dessen Schenkel über den andern Winkel hinausfällt.

§. 96. Der gestreckte oder gerade Winkel.

L. Wenn ihr euch hier (Fig. 18.) die Linie AC um A herumgedreht denkt, so daß solche nach und nach in AE, AF zu liegen kommt, bilden diese Linien mit AB noch immer einen Winkel? Sch. Ja. L. Wenn aber AC endlich ganz nahe an AD hinkommt, bildet sie dann mit AB noch einen Winkel? Sch. O ja. L. Und wenn AC endlich in AD selber fällt und diese Linie AD nichts ist, als die Verlängerung von AB; kann man dann noch sagen, daß AD mit AB einen Winkel bilde? Sch. Nein. L. Aber warum nicht; wenn wir unter Winkel dasjenige verstehen, wodurch die Lage der beiden Schenkel gegen einander bestimmt ist, haben nicht auch AD und AB eine bestimmte Lage gegen einander? Und wenn das, wodurch diese Lage der Schenkel gegeneinander bestimmt wird, die von diesen Schenkeln selbst begrenzte Ebene ist; begrenzen nicht auch AB und AD eine Ebene? Es bleibt also BAD noch immer ein Winkel; und diesen nennen wir einen flachen, gestreckten oder geraden Winkel. Was verstehen wir also unter einem

gestreckten oder geraden Winkel? Sch. Denjenigen, dessen einer Schenkel die Verlängerung des andern ist. L. Gut.

§. 97. Alle geraden Winkel sind einander gleich.

L. Sagt mir einmal, sind alle geraden Winkel einander gleich? Sch. Ja. L. Warum? Sch. — L. Ihr müßt euch fragen, woran ihr die gleichen Winkel erkennt? Sch. Wenn beide Schenkel auf einanderfallen. L. Nachdem ihr nehmlich die einen Schenkel mit den Spitzen der Winkel und die Ebenen selbst auf einander gelegt gedacht habt. — Gut. Nun noch einmal sind zwei gerade Winkel z. B. (Fig. 5.) W. AEB und W. CFD einander gleich? Sch. Ja, denn wenn ich sie mit den Schenkeln FC und EA auf einander gelegt denke, so daß die Spitzen (Scheitel) E und F auf einander fallen, so müssen die zweiten Schenkel EB und FD deshalb auch auf einander fallen, weil sie bloß die Verlängerungen der ersten Schenkel sind. L. Ganz richtig.

§. 98. Erster Lehrsatz der Summen und Differenzen der Winkel.

L. Wenn hier (Fig. 20.) von zwei Winkeln DAB und QMN, jeder aus zwei Stücken (Summanden) besteht, und diese Stücke einzeln einander gleich sind, nehmlich W. DAC = W. QMP und W. CAB = W. PMN, was werdet ihr daraus folgern können? Sch. Daß auch die ganzen Winkel DAB und QMN einander gleich seyn müssen. Sch. Wie werdet ihr mich davon überzeugen. Sch. Wir legen sie auf einander. L. Gut.

Der Lehrer läßt dies, durchfragend, genau so geschehen, wie oben bei demselben Satze für Linien bereits gezeigt worden ist; nebenbei alle Augenblicke, wie immer, jeden Neben-Umstand benützend, der beitragen kann, die früher erhaltenen Begriffe wiederum in das Gedächtniß zurück zu rufen, immer mehr zu berichtigen, zu befestigen und gegenwärtig zu erhalten. Er wird ferner denselben Satz an verschiedenen Figuren in verschiedener Lage ge-

dacht, von verschiedenen Schülern wiederholt beweisen lassen; wie immer jedoch darauf sehend, daß, während ein Schüler eben spricht und beweißt, der Lehrer plötzlich einen unaufmerksam scheinenden oder zerstreuten Schüler aufruft, um da fortzufahren, wo sein Vorgänger eben aufgehört hat. Zuletzt zeigt der Lehrer noch, daß derselbe Satz mit denselben Worten gegeben werden kann, für Winkel, wie ein solcher früher für Linien entwickelt worden ist.

§. 99. Die übrigen Sätze der Summen und Differenzen der Winkel.

Ferner läßt nun der Lehrer die übrigen 6 Sätze der Summen und Differenzen der Linien (§. §. 86. 88. 90 und 91.) auf Winkel übertragen, und für solche jedesmal noch, und einen und denselben jedesmal noch mit abwechselnder Lage der Figuren beweisen; zuletzt die Figuren recht in einander geschoben nehmend, immer in der Absicht, damit der Schüler das Wesen von der Form absondern lerne, um nachher, wo diese Sätze in ihren Anwendungen vorkommen, bereits hinlängliche Fertigkeit und Gewandtheit in ihrer Behandlung sich erworben zu haben; ferner immer den Grundsatz fest im Auge habend, daß es gar nicht darum zu thun sey, geometrische Sätze zu entwickeln, sondern bloß darum, im geometrischen Denken zu üben, wozu gerade diese allereinfachsten Sätze die beste Gelegenheit darbieten.

§. 100. Läßt sich ein Winkel halbirt denken?

Sind aber diese Sätze gut durchgenommen, so geht man sogleich zu Anwendungen derselben über, die sich hier bereits in sehr großer Menge darbieten. Man kann aber zuvor noch einige Begriffe der Winkel selbst feststellen, ohngefähr wie folgt.

L. Könnt ihr euch in einem Winkel ADB von D aus eine Linie DC so gezogen denken, daß dieser Winkel ADB halbirt wird, d. h. die beiden Winkel CDA und CDB einander gleich werden. Sch. O ja. L. Es ist aber doch gut, daß man sich das noch zergliedere. Ihr könnt das so machen: Ihr denkt

euch die Linie DK zuerst in DA, und dann um D sich herumdrehend, so daß sie z. B. auch in diese Richtung (Fig. 21.) fällt; so bildet jede solche Linie DK zwei Winkel, ADK und BDK, deren Summe den ganzen Winkel ADB wieder ausmacht. Der eine dieser Winkel, ADK, ist nun anfänglich sehr klein, wird aber immer größer, je weiter sich die DK herumdreht, und der andere BDK ist anfänglich dem BDA gleich, wird aber, während sich DK um D herumdreht, immer kleiner und kleiner, zuletzt so klein, als man will. Also muß irgendwo bei dem Herumdrehen von der Richtung DA nach der Richtung DB, die DK eine Lage bekommen, etwa die Lage DC, wo bei dem Wachsen des Winkels ADK und dem entsprechenden Abnehmen des Winkels BDK, diese beide einander gleich werden, (wegen der Stetigkeit des Raumes). Der Lehrer wird noch Rückblicke wagen, auf das was früher für Linien hätte gesagt werden können und sollen.

§. 101. Begriff des rechten Winkels.

L. Was denkt ihr euch unter einem rechten Winkel? Sch. Wenn die eine Linie auf der andern lothrecht (senkrecht, normal, perpendikular) steht. L. Woran erkennst du denn, daß eine Linie auf einer andern senkrecht steht? Sch. Wenn sie mit einander einen rechten Winkel bilden. L. So! Wo geht der Weg nach Dietendorf? — An dem Acker vorbei, wo mein Vater im vorigen Sommer seinen Roggen stehen hatte. — Und wo find ich diesen Acker? Dicht am Wege nach Dietendorf. — — Nun marschirt darauf los, und laßt euch's in Dietendorf wohl schmecken! den Weg dahin könnt ihr nun nicht verfehlen. — Sch. Ich werde so sagen: Eine Linie CD (Fig. 22.) steht senkrecht auf einer andern AB, wenn sie sich eben so wenig auf die eine als auf die andere Seite neigt. L. Das ist wenigstens etwas; wenn es auch noch schlecht ausgedrückt ist. Wodurch bestimmen wir denn das, was du jetzt wieder Neigung nennst, was aber nichts weiter ist, als die gegenseitige Lage der Linien zu einan-

der? Sch. Durch den Winkel. L. Gut; wie wirst du also das, was du so eben sagen wolltest, besser ausdrücken? Sch. Eine Linie CD steht senkrecht auf einer andern AB, wenn sie mit den beiden Richtungen DA und DB gleiche Winkel bildet. L. Das ist nun gut. Du kannst dir's aber für die Folge noch bequemer machen, wenn du auf die Frage: was ist ein rechter Winkel? antwortest: die Hälfte eines geraden Winkels; also einer der beiden Winkel, die entstehen, wenn man den geraden Winkel ADB durch die Linie DC halbirt. — Und auf die Frage: wann stehen zwei gerade Linien auf einander senkrecht? Kannst du dann antworten; wenn sie einen rechten Winkel mit einander bilden.

§. 102. Alle rechte Winkel sind einander gleich.

L. Sind wohl alle rechte Winkel einander gleich? Sch. Ja. L. Warum? Sch. Weil ich unter einem rechten Winkel nur einen solchen verstehe, der dem andern gleich ist. L. Halt ein klein wenig. Wenn ich sage, daß (Fig 22.) DC auf AB senkrecht steht, so verstehst du allerdings darunter, daß der Winkel CDB = CDA ist. Ich aber frage, wenn wir uns hier (Fig. 23.) noch einen rechten Winkel denken, etwa FH senkrecht auf EG, ob der rechte Winkel EFH dem rechten Winkel ADC gleich seyn wird; oder ob ein rechter Winkel in Berlin gleich ist einem rechten Winkel in London? Sch. Ja, die sind auch einander gleich. L. Das beweise mir einmal, d. h. davon überzeuge mich einmal, indem du die von uns hier vorher entwickelten Sätze anwendest. Sch. Weil der rechte Winkel jedesmal die Hälfte ist vom Geraden, und alle geraden Winkel einander gleich sind. L. Wenn aber zwei Winkel einander gleich sind, haben wir gehabt, daß dann auch die Hälfte des einen, gleich ist der Hälfte des andern? Sch. Gehabt haben wir's noch nicht, aber ich werde diesen Satz so beweisen, wie ich früher (§. 94.) einen ähnlichen für Linien erwiesen habe. L. Gut; beweise einmal.

Der Schüler beweißt diesen Satz noch und sieht dann den Zusammenhang des jetzigen Satzes mit den frühern, worauf es allemall allein abgesehen ist, möglichst gut ein.

§. 103. Hohler, erhabener, stumpfer, spitzer, Scheitel-Winkel.

Nun merkt euch noch: wenn (Fig. 18.) AB sich um A herumdreht, so daß sie nach und nach in AC, AE, AF, AD und zuletzt in AG zu liegen kommt, so ist der dadurch beschriebene Winkel BAG größer als der gerade Winkel BAD und ein solcher Winkel, welcher größer ist, als der gerade, heißt ein erhabener Winkel. Der andere Winkel BAG, der entsteht, wenn sich AB um A durch AH hindurch nach AG dreht, ist offenbar kleiner als der gerade Winkel, und jeder Winkel, welcher kleiner ist, als der gerade, wird ein hohler Winkel genannt.

Und wenn ein Winkel hohl, d. h. kleiner als der gerade Winkel ist, so kann er doch noch größer als der rechte Winkel seyn, z. B. BDK (Fig 22.), aber auch kleiner als der rechte Winkel, z. B. ADK. Der erstere heißt ein stumpfer, der andere ein spitzer. — Was ist also ein stumpfer Winkel? Sch. Ein Winkel, der größer ist, als ein rechter. L. Und der zugleich hohl ist, d. h. kleiner als ein gerader, oder kleiner als zwei rechte Winkel, was du jedesmal hinzufügen mußt, wenn sich solches nicht von selbst versteht.

L. Ferner heißen zwei Winkel wie ADK und BDK (Fig. 22.) Nebenwinkel. Woran erkennst du die Nebenwinkel? Sch. wenn sie einen Schenkel und die Spitze mit einander gemein haben, und wenn noch die beiden andern Schenkel einen geraden Winkel bilden. L. Kannst du mir sagen, was von den Nebenwinkeln zunächst in die Augen fällt? Sch. Ihre Summe macht den geraden Winkel oder zwei rechte Winkel aus. L. Richtig.

§. 104. Scheitelwinkel. Sie sind einander gleich.

L. Solche Winkel wie (Fig. 24.) AEC und DEB, wo die Schenkel AE, CE des einen nichts sind, als die Verlän-

gerungen der Schenkel des andern, nennen wir Scheitelwinkel. Was glaubst du von den Scheitelwinkeln mir erzählen zu können? Sch. Sie sind einander gleich. L. Woher weißt du das? Sch. — L. Nicht wahr, es sieht so aus? allein der Schein trügt oft; deshalb erkennen wir nichts für wahr an, was nicht aus unsern früher für wahr erkannten Sätzen hergeleitet werden kann. Kannst du vielleicht diese Scheitelwinkel als Summen ansehen, die deshalb gleich seyn müssen, weil ihre Summanden einander gleich sind? Sch. Nein; aber ich kann sie als Differenzen ansehen; denn AEC bleibt übrig, wenn ich von dem geraden Winkel CED den stumpfen Winkel AED hinwegnehme, und DEB bleibt übrig, wenn ich von dem geraden Winkel DEC den stumpfen Winkel CEB wegnehme. L. Ganz richtig; nur darin irrst du, daß du die Winkel AED und CEB für stumpfe Winkel hältst. Sie mögen dir so erscheinen; aber die Linien AB und CD sind ganz beliebig gedacht, und vielleicht von mir gerade so, daß AED kein stumpfer Winkel ist. Wie wirst du nun weiter fortfahren? Sch. Nun sind die Minuenden, nehmlich die geraden Winkel CED oben und DEC unten, einander gleich; und die Subtrahenden AED und CEB auch einander gleich; also müssen auch die Differenzen AEC und DEB einander gleich seyn, weil wir solches früher schon gehabt haben. L. Wenn du nicht so sehr unachtsam wärst, so wäre es gut. Wer hat dir denn gesagt daß die Subtrahenden AED und CEB einander gleich sind? Sind das nicht auch Scheitelwinkel? Und können wir wissen, daß Scheitelwinkel einander gleich sind, jetzt, wo wir gerade erst diesen Satz außer Zweifel setzen wollen? Mache es also anders und besser. Sch. Ich kann ja auch sagen, daß BED die Differenz ist, von dem geraden Winkel BEA als Minuenden und AED als Subtrahenden. Dann sind meine beiden Subtrahenden einander gleich, weil solches allemal ein und derselbe Winkel AED ist. L. Siehst du, nun ist es besser und gut. — Ihr könnt euch hier ein für allemal eine Regel merken, nehmlich, daß der Beweis selten oder nie gut gerathen

wird, so lange ihr nicht alles benützt, was vorausgesetzt, d. h. gegeben ist. Ich hatte dasmal vorausgesetzt, daß CED, aber auch AEB gerade Linien sind, also gerade Winkel begrenzen. Das erstemal hattest du aber nur den geraden Winkel CED oben und DEC unten benützt, und es konnte EL statt EB genommen werden, ohne daß dies eine Aenderung in deinem Beweise hervorgebracht hätte; also konnte der Beweis nicht gerathen. Jetzt aber hat man auch den geraden Winkel AEB in Erwägung gezogen, nun gilt das Resultat nicht mehr, wenn man EL statt EB setzen wollte, weil AEL nicht mehr ein gerader Winkel ist.

Der Lehrer läßt nun noch einmal beweisen, daß auch die Scheitelwinkel AED und CEB einander gleich sind.

§. 105. Noch mehr Anwendungen der 7 Lehrsätze der Summen und Differenzen der Winkel.

Nun mag man etwa folgende Anwendungen nehmen:

1) Wenn (Fig. 25.) W. BAC = W. DAE ist, so muß auch W. BAD = W. CAE seyn.

Man läßt den Satz erstlich durch Aufeinanderlegen beweisen; hernach zeigt man, daß derselbe Satz früher schon da gewesen ist, in so ferne diese Winkel Summen sind von gleichen Summanden.

2) Wenn (Fig. 25.) W. BAD = W. CAE gedacht wird, so muß auch W. BAC = W. DAE seyn.

3) Wenn (Fig. 25.) W. BAC > W. DAE gedacht ist, so muß auch BAD > CAE seyn. *)

4) Wenn (Fig. 25.) W. BAD < CAE gedacht wird, so muß auch W. BAC < W. DAE seyn. **)

---

*) Es ist sehr gut, daß der Lehrer für diese verschiedene Sätze an der Tafel ebenfalls dieselbe Figur beibehalte, damit der Schüler sich gewöhne, bloß die Voraussetzungen zu berücksichtigen, und nicht aus der Art, wie die Figur ihm erscheint, Folgerungen zu ziehen wage.

**) Weil man den ganzen Winkel BAE allemal als gemeinschaftlichen Minuenden ansehen kann, für jeden der übrigen (Theil-) Winkel als Dif-

5) Wenn ein Winkel a das n fache eines andern Winkels α ist, und ein Winkel b das n fache eines andern Winkels β ist, und $\alpha = \beta$, so ist auch a = b; ist aber $\alpha > \beta$, so ist auch a > b.

Zuerst für n eine bestimmte Zahl genommen und mittelst einer Figur anschaulich gemacht, hernach gezeigt, daß solches für jede andere Zahl auch gilt, daß man also deshalb n setzen kann, sobald man sich unter n jede beliebige ganze Zahl denken wolle.

6) Wenn (Fig. 26.) der Winkel EAF durch AB halbirt, und noch W. EAC = DAF gedacht ist, so muß auch W. CAD durch AB halbirt seyn.

7) Wenn W. CAB in AB halbirt, und noch W. EAC = W. DAF gedacht ist, so halbirt AB auch den Winkel EAB.

8) Ist W. EAD = W. CAF und EAF in AB halbirt, so ist auch CAD in AB halbirt.

9) Und ist wiederum W. EAD = W. CAF, aber dasmal CAD in AB halbirt gedacht, so muß auch EAF in AB halbirt seyn.

10) Ist dagegen W. EAC > W. DAF genommen, übrigens EAF durch AB halbirt gedacht, so halbirt AB den Winkel CAD nicht, sondern es ist W. CAB < W. DAB.

Der Lehrer wird diese Sätze noch vielfach abändern und dem Schüler zu neuer Uebung vorlegen, so, daß letzterer sich zuletzt aus den verwickelsten, hieher gehörigen Figuren mit Leichtigkeit herausfindet, jedesmal die Voraussetzungen gehörig berücksichtigt, und so im consequenten Schließen immer mehr Fertigkeit sich erwirbt.

---

ferenzen betrachtet, so kann man alle diese Sätze (1 — 4.) wohl immer mehrfach beweisen; d. h. mehren verschiedenen der Lehrsätze der Summen und Differenzen der Winkel unterordnen; und dies muß der Schüler besonders nach und nach herausfinden.

§. 106. Neue Anwendungen der Sätze von den Summen und Differenzen der Winkel.

Man nehme nun folgende Sätze vor:

1) Wenn zwei Winkel (Fig. 27.) ABD und HFG einander gleich sind, so sind auch ihre Nebenwinkel DBC und HFE einander gleich.

2) Wenn W. DBA > W. HFG gedacht wird, so muß der Nebenwinkel DBC < W. HFE seyn, und dergl. mehr.

Alle diese Sätze kann man von dem Schüler unmittelbar durch Aufeinanderlegen beweisen lassen; dann aber noch dadurch, daß er jeden derselben unter dem allgemeinern, welcher früher schon (eben durch Aufeinanderlegen) bewiesen worden ist, subsumirt, d. h. bloß nachweißt, daß derselbe Satz, der jetzt bewiesen werden soll, früher (in einer allgemeinern Form) schon da gewesen, schon bewiesen, also schon für wahr erkannt worden ist.

§. 107. Noch mehr Anwendungen.

Nun nehme man auch noch folgende Anwendungen: L. Wenn ich hier (Fig. 28.) zwei Linien CD und EF in der Ebene von einer dritten Linie AB in G und in H schneiden lasse; ist dann allemal (wenn die Winkel der Kürze wegen durch die hinein gezeichneten kleinen Buchstaben x, y, z, v, m, n, p und q bezeichnet werden) x = m? Sch. Ja. L. Warum? Sch. Weil die Linien CD und EF parallel sind. L. Da haben wir wieder deine Unaufmerksamkeit und deinen Mangel an Nachdenken. Erstlich: haben wir hier schon von parallelen Linien gesprochen? Können wir alle wissen, was du unter parallelen Linien verstehst? Dürfen wir etwas zulassen was wir hier noch nicht gehabt haben? — — Zweitens: Wenn wir nun wirklich von parallelen Linien schon gesprochen hätten, wenn wir alle wüßten, was man unter parallelen Linien versteht, woher weißt du denn, daß hier (Fig. 28.) diese Linien parallel sind? Habe ich gesagt, daß wir sie uns so denken wollen? Oder habe ich diese Linien CD und EF ganz beliebig liegend gedacht? Sch.

Ganz beliebig. L. Gut. Ist also W. x = W. m? Sch. Nein. L. Warum nicht? Sch. Weil wir uns die Linien CD und EF beliebig gedacht haben. L. Es ist aber doch x = v? Sch. Ja. L. Und diese Linien AB und CD sind doch auch ganz willkührlich angenommen. Mithin konnte doch vielleicht auch x = m seyn, obgleich die Linien CD und EF willkührlich gedacht sind. Aber wir wollen uns die Sache so denken. Während AB und CD ihre bestimmte Lage haben, also der Winkel x schon ein bestimmter ist, kann man die Linie EF noch immer um H hin und her gedreht denken, so daß sich der Winkel m beständig ändert, d. h. bald größer wird, bald kleiner? Deshalb kann, so lange die Lage von CD und EF gegen einander ganz beliebig gedacht ist, nicht jedesmal x = m seyn, sondern höchstens nur einmal, in einer einzigen bestimmten Lage.

Wir wollen dagegen nun einmal die Lage der Linien CD und EF so denken, daß gerade x = m ist; d. h. also, wir wollen x = m annehmen; was kannst du daraus nun für Folgerungen ziehen? Sch. Daß auch y = n ist. L. Warum? Weil y und n die Nebenwinkel sind der gleichen Winkel x und m. L. Was kannst du weiter folgern? Sch. — L. Ist nicht auch y = p? Sch Ja. L. Warum? Sch. Es ist y = n und n = p, also auch y = p. L. Das ist richtig; du hattest es aber noch direkter; denn p ist ja auch der Nebenwinkel von m; also sind y und p auch wieder Nebenwinkel gleicher Winkel.

Eben so läßt nun der Lehrer den Schüler die übrigen Verhältnisse der Winkel auffinden, nehmlich, daß, wenn x = m vorausgesetzt wird, auch x = q, v = m, y = p, z = p, v = q seyn müsse.

L. Wie groß ist aber, wenn die Linien so gedacht sind, daß x = m ist, die Summe y + n? Sch. — L. Eine Summe besteht aus zwei Summanden. Du mußt also diese Summanden untersuchen; mußt nachsehen, was du von ihnen zunächst weißt, namentlich, welchen Zusammenhang solche mit dem Gegebenen erblicken lassen. Was weißt du z. B. von y? Sch. Es

ist der Nebenwinkel des gegebenen x. L. Gut. Und was weißt du von m? Sch. Es ist vorausgesetzt $m = x$. L. Was kannst du mir also von der Summe $y + m$ sagen? Sch. Weil ich x statt m setzen kann, so ist solche $= y + x$. L. Gut. Was weißt du aber von $y + x$? Sch. Daß y und x Nebenwinkel sind, also $y + x =$ zweien rechten Winkeln ist. L. Gut. Es ist also? Sch. $y + m = 2R$, wenn R den rechten Winkel bedeutet.

Der Schüler entwickelt zuletzt noch, daß wenn $x = m$ vorausgesetzt wird, dann auch $x + n = 2R$, $z + q = 2R$ und $v + p = 2R$ seyn müsse.

§. 108. Immer noch Anwendungen.

L. Wenn ich mir aber (Fig. 28.) die Linien CD und EF so denke, daß $x > m$ wird, was könnt ihr nun daraus folgern? Sch. Daß $y < n$, $y < p$, $v > m$, $z < p$, $v > q$, $x > q$, $z < n$ ist.

Solches läßt der Lehrer wieder auf verschiedene Art nachweisen, so wie auch noch, daß unter derselben Voraussetzung $y + m < 2R$, $x + n > 2R$, $z + q < 2R$, $v + p > 2R$ seyn müsse.

Hernach wird noch $x < m$ angenommen und abermals alle Folgerungen gezogen, welche aus dieser Voraussetzung zunächst hervorgehen.

Dann nimmt man etwa $v > m$ oder $v = m$, oder $v < m$ an, und läßt aus jeder dieser Voraussetzungen abermals Folgerungen ziehen, wo möglich alle, die sich zunächst ergeben. — Ferner nimmt man etwa $v + p > 2R$ oder $v + p = 2R$ oder $v + p < 2R$, und läßt aus diesen Voraussetzungen die nothwendigen Folgerungen entwickeln; wie immer, so auch hier, den Grundsatz im Auge behaltend, daß der Schüler nicht Sätze, sondern das Folgern, das Schließen, das Denken überhaupt erlernen soll.

Glaubt man zuletzt, und zeigt sich das in der Fertigkeit und

Leichtigkeit, mit welcher die Schüler ihre Antworten zu Tage fördern, daß diese Uebungen hinlänglich durchgeführt sind, so mag man noch die Resultate dadurch dem Gedächtniß besser einzuprägen suchen, daß man die Benennungen äußerer, innerer, Wechsel-Winkel und dergl. einführt, und mittelst derselben eine Uebersicht dieser Resultate zu bewerkstelligen trachtet.

Und nun sind die Vorbereitungen zur Parallelentheorie beendigt, so daß sie, die Parallelentheorie, selbst entwickelt werden kann. Nur gehe man nicht eher zu ihr über, als bis der Schüler in dem vorhergehenden, und vorzüglich in der Fertigkeit zu folgern und zu schließen, und neue Resultate aus gegebenen abzuleiten, bereits festen Fuß gefaßt hat.

§. 109. Erster Lehrsatz der Parallelentheorie.

L. Denken wir uns noch einmal diese Figur (Fig. 28.), wo zwei Linien CD und EF von einer dritten AB geschnitten werden; schneiden sich die Linien CD und EF oder schneiden sie sich nicht? Sch. Sie schneiden sich nicht. L. Warum nicht? Sch. Das sieht man ja, wir haben das so angenommen (uns so gedacht). L. Da hast du gewissermaaßen recht, und auch nicht recht. Wenn ich nehmlich frage, ob sich zwei gerade Linien schneiden, so verstehe ich nicht darunter, ob die Striche (von Kreide, Tinte, Tusche etc.), so weit als es dir beliebt hat, sie hinzumachen, sich schneiden, sondern ob die unter diesen Strichen vorgestellten, in's Unendliche sich zu denkenden geraden Linien nie zusammentreffen werden. Sch. Dann können wir nicht wissen, ob sich diese Linien CD und EF hier (Fig. 28.) schneiden oder nicht. Das wird wohl von den Winkeln x und m abhängen. L. Was versteht man darunter, wenn man sagt: zwei Linien schneiden sich? Sch. Sie treffen zusammen. L. Was heißt das: sie treffen zusammen? Sch. Sie haben einen Punkt mit einander gemein. L. Richtig. Zwei Linien schneiden sich, das will soviel sagen, als diese Linien haben einen Punkt mit einander gemein. — Können sich zwei gerade Linien zweimal schnei-

den, d. h. zwei Punkte mit einander gemein haben? Sch. Nein; sonst würden sie auch alle übrigen Punkte mit einander gemein haben, d. h. in eine einzige Linie zusammenfallen. L. Weil wir nun hier x=m angenommen haben; ist nicht auch y=n und z=p und v=q? Sch. Ja. L. Scheint da nicht oberhalb AB alles zu seyn wie unterhalb AB? Sch. Ja. L. Wohlgemerkt, es *scheint* so. Gesetzt nun dieser Schein würde für uns zur Gewißheit erhoben; könnten dann CD und EF sich oberhalb AB schneiden? Sch. Nein; denn dann müßten sie sich auch unterhalb schneiden, folglich zweimal, d. h. in zwei Punkten, und das ist nicht möglich. L. Könnten sich aber vielleicht CD und EF unterhalb AB schneiden? Sch. Wenn alles oben wie unten ist, dann auch nicht, weil sie sich dann auch oberhalb AB schneiden müßten, folglich in zwei Punkten. L. Worauf wird es hier also vorzüglich ankommen? Sch. Daß wirklich alles oben wie unten ist. L. Wenigstens in Bezug auf das Schneiden der Linien GD und HF, so wie GC und HE. Woraus können wir die Folgerungen zu ziehen hoffen? Sch. Nur aus den Voraussetzungen. L. Gut; was ist hier vorausgesetzt? Sch. Daß x=m, also auch y=n, z=p, v=q, v=m, y=p u. s. w. ist. L. Sehr richtig. Weil nun durch die Winkel x, m, die Lage der Linien GC und HE gegen AB festgestellt ist, und so auch durch die Winkel z, p die Lage der Linien GD, HF ebenfalls feststeht, so fragt sich nur noch, ob diese Lage so feststeht, daß, wenn man sich die ganze Figur durch AB getrennt denkt, so daß AB als Grenze des einen Theils, und auch als Grenze des andern, gleichsam doppelt gedacht wird, ob dann beide Theile so auf einander gelegt gedacht werden können, daß alle Linien zusammenfallen?

Der Lehrer läßt nun die Congruenz des obern Theils und des untern durch Aufeinanderlegen nachweisen, was wegen der gleichen Winkel und der auch in umgekehrter Lage noch ihr gleich bleibenden GH, sehr leicht geschieht. Zuletzt, wenn, wie hier, der analytische Gang zu dem Beweise geführt hat, läßt man

ihn noch synthetisch geben (in umgekehrter Ordnung), damit der Schüler an diesem letzteren die Uebersicht desselben gewinne. Derselbe Beweis wird dann noch in verschiedener Lage der Figur wiederholt. — Zuletzt wird erklärt, daß gerade Linien, die sich nie schneiden, Parallellinien genannt werden. *)

§. 110. Zweiter Lehrsatz der Parallelentheorie.

L. Wenn wir aber umgekehrt, von den Winkeln nichts wissen, sondern wenn wir uns die Linien CD und EF so denken, daß sie sich nie schneiden; da fragt es sich, ob dann auch allemal x = m seyn werde? Sch. Ja, dann müssen auch die Winkel einander gleich seyn. L. Nicht so rasch. Wenn x = m ist, so schneiden sich CD und EF nie, das haben wir so eben bewiesen. Nun werde x etwas größer wie m (wenn sich etwa HE sehr wenig nach HA zu dreht); weißt du nun gewiß, daß die Linien CD und EF jetzt sich schneiden werden? Und gesetzt sie schneiden sich jetzt auch noch nicht (die unendlich gedachten geraden Linien), so folgt umgekehrt, daß, wenn sich die Linien CD und EF nie schneiden, dann vielleicht x = m, vielleicht aber auch x > m seyn kann. Glaubst du also, daß, so oft sich CD und EF nie schneiden, so oft auch x = m seyn müsse, so hast du das erst zu beweisen, wenn auch andere davon überzeugt werden sollen. Wie wirst du das anfangen? Sch. Es ist hier auch wieder alles oben wie unten; denn die Linien CD und EF schneiden sich nicht oben und auch nicht unten. So scheint es also, als wenn oben die Winkel auch eben so seyn müßten wie unten, also x = q, also auch x = m. L. Du hast gut gethan

*) Der Vfr. pflegte hier, so wie früher schon öfter bei ähnlichen Gelegenheiten, jedesmal auch auf die Verschiedenheit aufmerksam zu machen, welche statt findet, je nachdem die Linien alle in einer und derselben Ebene liegen oder nicht. So also hier zeigte er an einigen Beispielen, wie gerade Linien im Raume unter einander weg gehen können, ohne sich zu schneiden, wie man aber nur diejenigen Parallellinien nenne, welche sich nicht schneiden, aber zugleich in einer und derselben Ebene liegen.

zu sagen, es scheint; denn daraus, daß eines oben wie unten ist, folgt noch nicht nothwendig daß alles oben wie unten ist. Wären wir gewiß, daß alles oben wie unten ist, so könntet ihr das besser noch so benützen. Ihr sagtet: Sind oben die äußern Winkel größer wie ihre innern, so muß das auch unten so seyn; wäre also $x > m$, $p > y$, so müßte auch $z > p$ und $q > v$ seyn, und natürlich wäre dann auch $x + z > m + p$, d. h. ein gerader Winkel größer als ein anderer. Und wären oben die äußern Winkel kleiner als ihre innern, so wäre dies auch unten so; also $x < m$ und zugleich $z < p$; mithin auch $x + z < m + p$, d. h. ein gerader Winkel kleiner als ein anderer. Keines von beiden ist also möglich; und es bleibt demnach bloß $x = m$ übrig. — L. Ist also nun unser Lehrsatz erwiesen? Sch. Wenn wir annehmen dürfen, daß in der Figur (28.) Alles oben wie unten seyn müsse, weil sich die Linien nicht oben und auch nicht unten schneiden; dann ist er erwiesen; aber außerdem nicht. L. Gut. Nun gestehe ich euch, daß ich dasmal, daß alles oben wie unten ist, gar nicht so anschaulich überzeugend machen kann, als wie bei dem vorigen Satz, wo die gegebene Gleichheit der Winkel mir ein erfolgreiches Aufeinanderlegen der obern und der untern Figur erlaubte. Vorläufig müssen wir uns also begnügen, diese Annahme geradezu zu machen, bis wir später vielleicht zugeben lernen, daß, weil die Lage zweier geraden Linien gegen einander, und Winkel, ein und dasselbe ist, diese Lage der Linien in unserer Figur (28.) das einzige und zugleich alles ist, was in ihr betrachtet werden kann.

§. 111. Dritter Lehrsatz der Parallelentheorie.

L. Denkt euch nun einmal $x > m$, werden sich nun (Fig. 28.) CD und EF schneiden, und wo? Sch. Sie werden sich oberhalb schneiden, da wo der äußere Winkel größer ist als der innere. L. So scheint es; wie wollt ihr mich davon überzeugen? Sch. Ich lege wieder so, wie bei dem ersten Satz (§. 109.) den obern Theil der Figur auf den untern. L. Gut. Macht

das einmal gehörig? — Der Schüler findet, daß dann folgende Figur (29.) entsteht. L. Was folgt nun daraus? Sch. Daß nun GC und HE sich schneiden müssen, weil sie inwendig liegen. L. Halt, so schnell geht das nicht. Wenn dieser Schluß richtig wäre, so dürft ich ja nur noch zwei Linien GM und HN ziehen (Fig. 28.); dann liegen GD und HF inwendig und müssen sich also auch schneiden. Ist das richtig? Sch. Nein diese schneiden sich nicht. L. Auch das kannst du nicht wissen. — Dieses Aufeinanderlegen des obern Theils der Figur auf den untern war schon recht gut; aber vorher mußtet ihr schon wissen, daß sich die Linien CD und EF (Fig. 28.) schneiden; dann würdet ihr jetzt behaupten können, daß (Fig. 29.) von den beiden Paaren von Linien GD und HF und dann GC und HE eines sich schneiden müsse; und dann fällt aus der Figur in die Augen, daß dieses nur das innere Paar seyn könne. Also vor allen Dingen beweißt erst, daß sich die Linien CD und EF wirklich schneiden. Sch. Schnitten sich diese Linien nie, so wäre ja nach dem vorigen Satze $x = m$; hier also wo $x > m$ ist, müssen sich die Linien schneiden. L. Richtig. Wo sie sich schneiden, das habt ihr eben durch Aufeinanderlegen des obern Theils der Figur auf den untern erkannt.

§. 112. Vierter Lehrsatz der parallelen und schneidenden Linien.

L. Wir wollen wiederum eine andere Voraussetzung machen. Wir wollen nehmlich dasmal bloß voraussetzen, daß CD und EF (Fig. 28.) sich oben schneiden und wieder von AB in G und H geschnitten werden; was werdet ihr daraus folgern können. Sch. Es wird nun auch $x > m$ seyn müssen. L. Wahrscheinlich; aber wie willst du das beweisen? Sch. Wenn $x = m$ wäre, so könnten sich ja die Linien CD und EF nicht schneiden. L. Das ist wohl wahr; aber es könnte ja $x < m$ seyn. Sch. Dann würden sich die Linien CD und EF unten schneiden. L. Warum? Sch. Weil dann auch $z > p$ seyn müßte; also nach dem vorigen Satz. L. Richtig.

Schluß.

Wir glauben nicht weitläufiger seyn zu dürfen, und doch gezeigt zu haben, wie nun hierauf die übrigen Sätze der Winkel (d. h. der Lage der Linien) welche gewöhnlich gegeben werden, gegründet werden können, und wie der Schüler darauf hin gewiesen werden muß, sie alle als Resultate der Anwendungen der eben entwickelten (Haupt-) Sätze der parallelen und schneidenden Linien zu betrachten, immer weniger die Sätze selbst im Auge habend, als das Entwickeln derselben aus den vorhergehenden.

Diese Sätze führen übrigens zur Betrachtung der Dreiecke; und auf sie kann daher die Congruenz der Dreiecke und die mit ihr zusammenhängenden Sätze des gleichschenklichen und ungleichschenklichen Dreiecks folgen; wie solches näher in den angeführten Leitfaden und Lehrbüchern nachgesehen werden muß. So wie hier für den allerersten geometrischen Unterricht gezeigt worden ist, genau in demselben Geiste wird fortgefahren, den Schüler fortwährend und nach und nach immer mehr als Selbstfinder auftreten lassend, kein anderes Ziel im Auge habend, als höchstmöglichste Uebung seiner geistigen Kräfte, besonders aber seines Abstraktions-Vermögens; daher sich wenig kümmernd, an welchen Sätzen solches geübt wird, wenn der Schüler nur nach und nach die wenigen in dem Lehrbuche unter dem Namen der Hauptsätze herausgehobenen genau im Gedächtniß hat, und in ihrer Anwendung vorzüglich sich übt.

Kann man in Quarta eines Gymnasiums das hier entwickelte bis zur Congruenz der Dreiecke inclus. (in wöchentlich 2 Stunden) alle halbe Jahre gehörig durchnehmen, so werden sich die Tertianer in der ebenen Euklid'schen Geometrie schon sehr tüchtig festsetzen, während hier ebenfalls, wie in jeder Klasse, alle halbe Jahre von vorne angefangen wird. Die Sekundaner treiben dann ebene Trigonometrie und üben sich fortwährend in der Auflösung und Auffindung immer neuer und neuer Uebungsaufgaben und Sätze der ebenen Euklid'schen Geometrie; während

die Primaner Körperlehre und sphärische Trigonometrie treiben (in den für jede Klasse festgesetzten 3 wöchentlichen geometrischen Lehrstunden). In den 3 andern wöchentlichen Lehrstunden wird fortwährend Zahlenlehre (Arithmetik, Algebra, Analysis des Endlichen) getrieben, und zwar in Tertia, so viel wir oben näher angedeutet haben, in Sekunda die Lehre der Bestimmungsgleichungen und die Elemente der Analysis, in Prima endlich Fortsetzung der Analysis des Endlichen.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

Gedruckt bei Trowitzsch und Sohn.

Erstens. Allgemeine Formeln, die Gegensätze der Operationen darstellend.

A.... **Allgemeine Elementar-Formeln für die Addition und Subtraktion.**

α) 1) $a+b=b+a$; 2) $(a+b)+c=(a+c)+b=(b+a)+c$.

β) I. $(a-b)+b=a$ II. $(a+b)-b=a$ } 1) $(a+b)-c=(a-c)+b$; 3) $a-(b-c)=(a-b)+c$; 2) $a-(b+c)=(a-b)-c$; 4) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$; u. s. w. f.

B.... **Allgemeine Elementar-Formeln für die Multiplikation und Division.**

α) 1) $m(a+b)=ma+mb$; 2) $m(a-b)=ma-mb$; 3) $ab=ba$; 4) $c(ab)=a(bc)=b(ac)$.

β) I. $b.\frac{a}{b}=a$ II. $\frac{b.a}{b}=a$ } 1) $\frac{a+b}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}$; 2) $\frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}$; 3) $m.\frac{a}{b}=\frac{ma}{b}$;

4) $m.\frac{a}{b}=\frac{a}{b:m}$; 5) $m.\frac{a}{b}=a.\frac{m}{b}$; 6) $\frac{a}{b}:m=\frac{a:m}{b}$;

7) $\frac{a}{b}:m=\frac{a}{bm}$; 8) $a:\frac{b}{m}=a.\frac{m}{b}$; 9) $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$;

10) $\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}$; 11) $a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$; 12) $a-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$;

13) $\frac{b}{c}-a=\frac{b-ac}{c}$; 14) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$; 15) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$;

16) $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; 17) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a:c}{b:d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}$, u. s. w. f.;

und noch 18) $\frac{A}{B}=x+\frac{A-Bx}{B}$.

Fortsetzung der allgemeinen Formeln.

C.... **Allgemeine Elementar-Formeln für die Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.**

α) 1) $a^m.a^n=a^{m+n}$; 2) $a^m:a^n=a^{m-n}$; 3) $(ab)^m=a^m.b^m$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$; 5) $(a^m)^n=a^{mn}=(a^n)^m$.

β) I. $(\sqrt[m]{a})^m=a$ II. $\sqrt[m]{(a^m)}=a$ } 1) $\sqrt[m]{ab}=\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}$; 2) $\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$; 3) $\sqrt[m]{(a^n)}=(\sqrt[m]{a})^n$; 4) $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})}=\sqrt[mn]{a}$; u. s. w. f.

γ) I. $c^{\overset{c}{\log} a}=a$ II. $\overset{c}{\log}(c^a)=a$ } 1) $\overset{c}{\log}(ab)=\overset{c}{\log}\, a+\overset{c}{\log}\, b$; 2) $\overset{c}{\log}\left(\frac{a}{b}\right)=\overset{c}{\log}\, a-\overset{c}{\log}\, b$; 3) $\overset{c}{\log}(a^b)=b.\overset{c}{\log}\, a$; 4) $\overset{c}{\log}(\sqrt[b]{a})=\frac{\overset{c}{\log}\, a}{b}$; u. s. w. f.

Zweitens. Specielle Formeln, dieselben Gegensätze der Operationen aussprechend.

1) $a+0=a$; 2) $a-0=a$; 3) $+b=b$; 4) $a+(-b)=a-b$;

5) $a-(-b)=(a+b)$; 6) $-(-b)=+b$; 7) $a-b=-(b-a)$; 8) $(-a)+(-b)=-(a+b)$;

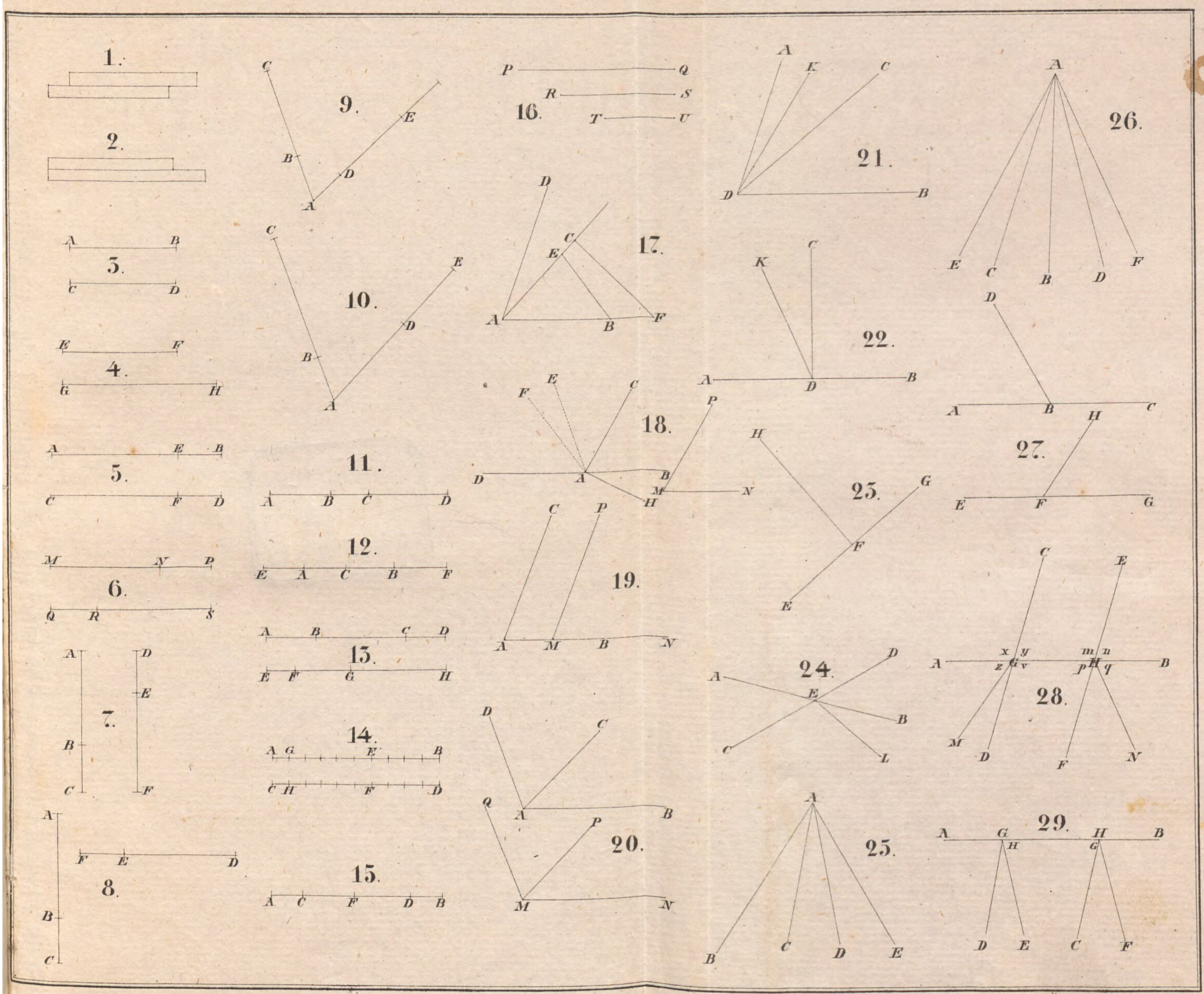
9) $(-a)+(-b)=(-a)-b$; 10) $(-a)-b=-(a+b)$; 11) $(-a)-(-b)=(-a)+b=b-a$;

12) $0.a=a.0=0$; 13) $\frac{0}{a}=0$; 14) $(-b).a=a.(-b)=-ab$;

15) $(-b).(-a)=(-a).(-b)=+ab$; 16) $\frac{-b}{a}=-\frac{b}{a}$; 17) $\frac{b}{-a}=-\frac{b}{a}$;

18) $\frac{-b}{-a}=+\frac{b}{a}=\frac{b}{a}$; 19) $a^0=1$; 20) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$; u. s. w. f.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin

Versuch einer kurzen, gründlichen und deutlichen, auch Nichtmathematikern verständlichen Anweisung 10 - 14jährigen Knaben in Untermittelklassen eines Gymnasiums; in obern Klassen einer gelehrten Vorbereitungsschule, desgleichen in höhern Bürger- und technischen vorbereitungs-Schulen, zu einem leichten, gründlichen und wissenschaftlichen Studium der Mathematik

Berlin 1827

Math.p. 382 ft
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082513-5